零的历史

The Nothing That Is

[美] 罗伯特·卡普兰 著

『平衡积分卡之父』继续阿基米德、费马、牛顿的研究之旅

追踪最桀骜不驯的数学精灵的身世之谜

从一无所有中探寻通往无限可能性的数学之路



中信出版社
CITIC PUBLISHING HOUSE

这本书中紧紧地围绕着这样一个不可思议的问题：零到底意味着有还是无？在这个问题上没有人能长时间思考而不担心自己会发疯。

零的历史

The Nothing That Is





www.publish.citic.com

ISBN 7-5086-0158-0/K・31

定价：29.80元

The Nothing That Is

零的历史

[美] 罗伯特·卡普兰 著
冯振杰 郝以磊 茹季月 译

中信出版社
CITIC PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

零的历史/［美］卡普兰著；冯振杰等译．–北京：中信出版社，2005.1

书名原文：The Nothing That Is

ISBN 7-5086-0158-0

Ⅰ．零…　Ⅱ．①卡…　②冯…　Ⅲ．数学哲学问题–研究　Ⅳ．01-0

中国版本图书馆CIP数据核字（2004）第129464号

The Nothing That Is: A Natural History of Zero by Robert Kaplan

零的历史

LING DE LISHI

著　　者：［美］罗伯特·卡普兰

译　　者：冯振杰　郝以磊　茹季月

责任编辑：黄　犀　胡明静

出 版 者：中信出版社（北京市朝阳区东外大街亮马河南路14号塔园外交办公大楼　邮编　100600）

经 销 者：中信联合发行有限责任公司

承 印 者：北京国彩印刷有限公司

开　　本：787mm×1092mm　1/16　　**印　　张**：17　　**字　　数**：164千字

版　　次：2005年2月第1版　　**印　　次**：2005年2月第1次印刷

京权图字：01-2003-2336

书　　号：ISBN 7-5086-0158-0/K·31

定　　价：29.80元

---

http://www.publish.citic.com　　010–85322522

E-mail: sales@citicpub.com

author@citicpub.com

献给弗兰克·布里姆塞克

3小时51分钟54秒就成为零先生。

零有多么靠近零？

——英国副首相

约翰·普雷斯科特（John Prescott）

致谢

The Nothing That Is

A Natural History of Zero

首先让我真诚地感谢两个做了主要工作的人，从他们那里我得到了很大的帮助，一个是艾伦女士，她的图片和画龙点睛的提示使你能更好地理解这本书；另一个是巴里·玛祖(Barry Mazur)，他的无限热情和洞察力使我深受影响。如果没有克里斯托弗·道尔(Christopher Doyle)、埃里克·斯莫诺夫(Eric Simonoff)和迪克·特雷西（Dick Teresi)，这本书真的会像零一样空洞无物。这本书还受益于彼得·基纳（Peter Ginna）的幽默评述和细心审阅。

一些社团的学生对这本书也付出了很多的时间，他们有丰富的知识，感谢他们的帮助。乔恩·特纳豪斯（Jon Tannenhauser）和米拉·伯恩斯坦（Mira Bernstein）有丰富的专业知识，提了很多宝贵的意见。彼得·任兹（Peter Renz）的知识甚至比他的私人图书馆还要丰富，也提供了很多帮助，真诚地感谢他们。下面的这些人都给我提供了帮助，非常感谢他们，他们是：加里·艾德曼(Gary Adelman)，约翰尼斯·布朗豪斯特(Johannes Bronkhorst)，托马斯·伯克(Thomas Burke)，亨利·考恩（Henry Cohn)，保罗·邓达斯（Paul Dundas)，马修·埃默顿(Matthew Emerton)，哈里·福克（Harry Falk)，马丁·加德纳（Martin Gardner)，尼娜·戈德马克（Nina Goldmakher)，苏珊·戈德玛克（Susan Goldstine)，詹姆斯·耿恩(James Gunn)，瑞奎布·哈奎（Raqeeb



Haque)，米歇尔·杰夫（Michele Jaffe），詹姆士·雷克斯·诺森（James Rex Knowlson），理查德·兰德斯（Richard Landes），鲍里斯·赖特斯凯（Boris Lietsky），瑞辉·麦克唐纳（Rhea MacDonald），乔治·摩斯（George Moser），查尔斯·纳皮尔（Charles Napier），莉娜·奈克鲁杜娃（Lena Nekludova），戴维·纳尔逊（David Nelson），拉里·普法夫（Larry Pfaff），唐纳德·兰斯（Donald Rance），安德鲁·瑞安尼克（Andrew Ranicki），阿米尔·瑞曼（Aamir Rehman），阿卜杜哈米德·萨布拉（Abdulhamid Sabra），布赖恩·A·沙利文（Brian A.Sullivan），丹尼尔·泰尼三世（Daniel Tenney III），阿尔夫·范德尔普坦（Alf van der Poorten），伽德·汶史（Jared Wunsch）和唐·瑞格（Don Zagier）。

最后，我还要真诚地感谢下面这些人，他们在最重要的时刻给了我无穷尽的支持。他们是苏格兰的卡普兰斯，剑桥的托马斯·圭利莫、吉莉甘一家人和克鲁鲍克一家人，巴黎的哈里森·马达维一家人，英格兰威尔特郡的富兰克林一家人，切斯特纳特山的纽祖一家人，沙伦市的齐利文斯基一家人——和我各地的学生。

致读者

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



初读本书你可能会遇到些许障碍，但是，如果你有中学的代数和几何知识，你读完这本书将不存在任何问题。在下面的网站上，你可以查到相关的参考书目和注释：

www.oup-usa.org/sc/0195128427/.

序 言

透视零

单纯地看，零就是零，但仔细研究后，你会发现通过它你将可以了解这个世界。因为，数学表述着事物复杂的本质，而把庞大的数学体系连成了一个整体的是零。从简单的计数到复杂的运算，从估计事物发生的几率到精确知道与我们相关的事件何时达到最大值，这些有力的数学工具都让我们使用这样的思考方法：一个事件的发生与其他的事件相关，并且所有这些都离不开零这个中心。

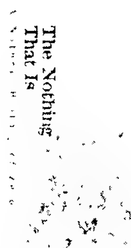


利用抽象出来的符号，我们可以把控制我们周围物体做轨道运动或发生突变的规律形象地表达出来。甚至思想本身也能用数学的方法反映出来，这种反映能力的强大可能令人十分费解，但它也正帮助人们澄清那些深邃的问题。

零的传播历史及其具体的概念充满了玄机，当那些旅行者第一次把它带入西方的时候，它原来的身份就已经被掩盖和曲解了。在这本书中你将会了解到，零是苏美尔人（Sumerian，*古代幼发拉底河下游的居民——译者注*）在处理问题实在没有办法时的权宜之计，在随后的几个世纪中零的形式改变过，而且几乎消失过，当再一次出现时，它的形式发生了很大的改变。零的力量对一些人而言神奇无比，对其他人又极其残忍。零在希腊遭到嘲弄并最终离开那里；在印度过得安逸舒适；在西

方人面前遭遇身份危机，最终出现在牛顿身边并生活在我们这个精细和复杂的时代。

我探索这方面问题的方法部分是用博物学家的方法，收集零的各种各样奇妙的表达形式，这些形式表达的不仅仅是一个数字，而且还是表现绝望或兴奋的符号；作为零本身，它是一个具体的事物；作为学术先祖，又是谜中之谜。我们人类比喜鹊更勤劳，日积月累下来，我们的思想更加成熟。因此，我还会同时使用历史学家的方法，目的是使下面的故事更有趣味：在那些任意篡改巨大数字的人眼里，数字好像就是飞行中的网球；在那些乐于计算的人眼里，好像生活就是用一根计算的细线悬着；从西方到东方，那些不懂得零的作用而遭受无情惩罚的人们，却不得不忍受零如影随形，而不同地方的人们对零有不同的看法，聪明的意大利人称零为笨蛋，而苏格兰人则认为零是行为古怪的魔术师。



当我们追寻零的各种符号和含义的慢慢演化过程时，我们将看到人类创造数学的过程和数学为人类所做的贡献。数学并不是天赋之物，只有热切地追求它，数学才给人类灵感。那么这种追求究竟是什么？或者是修修补补的设想和灵感的结合；抑或是别人引导下灵光乍现的想法，这个想法也许会沉寂几个世纪，仅仅当思潮巨变发生时，它才突然萌发出来；另外就是在猜想和验证、假设和推理中追求。

正像莎士比亚称呼它的一样，零谈不上是一个数字，但为什么在数学这个巨大的表达体系中零却扮演着如此重要的角色呢？为什么大多数数学家无论在何等重要的数字列表中都要给零一个显著的位置呢？只因为人们能宣称由于$0\times0=0$，所以数字才是真实的？我们将看到这些答案随着零含义的进化而发展。

我们看到零和数学一起慢慢趋于完美，我们思想中深层次的思考将聚焦到一点。举一个例子，由于我们好奇心的需要，我们会先给我们创造的事物取名字，然后我们就会想知道这些被创造的事物是否能够脱离它们的名字独立存在。我们的需求要求我们远离个别的实例，去抽象出一般性的问题，省略掉事物那些特殊而异常的现象。像从空中去看整个果园而不是去看那一棵长满了节瘤的树。

在这些思想的指引下，我们将在随后的章节中了解到渐渐深入的问题，逐渐增多的知识将有助于你看清并超越这个世界。到底零是一个真实存在的事物还是人们虚构的东西，这个问题依然令人忧虑不安，这也将使人们不断地思考这样一个长期存在的难题：我们是否已创造或发现了理解事物的方法，因此，更进一步的问题是我们现在所处的层次。如果说我们的评价能力比天使弱——或者仅仅弱一点点，那么，我们到底是被创造者还是创造者？



虽然数学的辉煌业绩足以载入史册，零的历史也可称完美，但它还远没有结束，事实上是刚刚开始。零不是代表着一个环的结束，似乎说它是一个入口更合适一些。亚历山大·戈劳森迪克（Alexander Grothendieck）是我们这个时代的一个具有丰富想像力的数学家，他的研究成果已经改变了我们看待数学的方式，他曾经在他的巨著中花费数年的时间来修订、扩充关于零的一章，并把它作为书的序言和总结。零永远是那么诱人，无限的靠近但永远也不能达到：也许这才真正接近零的本质。

目录

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



目录

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



目录

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



第1章 思想的印迹

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



随着人类计数技巧的不断发展，零以印在一块湿黏土上的两个楔形形式开始了它的生涯。我们通过给不同数量事物以不同的数字命名和符号来计数：1，2，3……但是如果一定要给每个新数量一个全新的名字和符号，就会穷尽你所有的心智和记忆。试试吧，给前20个数字编上不同的符号，例如：

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, γ, /, §, ◇, ℘, ∇, ¬, Ψ, ∧, Y, λ

那么，7加8等于多少呢？是**∇**。

那么ψ减去/呢？从ψ开始往回数/位，是6。

又比如，γ加上∧呢？很不幸，我们还没有为它创造新的符号。即使现在来构思，我们也不得不首先创造出另外的7个符号。

这个问题一定是在每种文明的初期就得到了解决，就像我们孩提时代做的那样：先把想要计数的物体分成堆，这些堆中包含的物体都是相等的易处理的数量单位。例如，

卌 卌 卌 是|||个卌

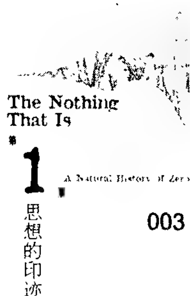
因此不能直观表示的γ＋∧就变成

卌 卌＋卌 卌 卌 |||，

等于卌个卌再多上|||。

这种基本的数量单位通常是5或10，正好是我们手指的数量，或者是别的可以一目了然的数目（我们数鸡蛋用“打”——12个）。

一旦有了这种捷径（这种捷径给我们由加到乘的混合运算带来了巨大飞跃），新的需要就随之而来：如果卌 卌 卌＋卌 卌 |||一共是卌个卌再加上|||，它确切代表什么样的一个数目呢？终究不还是要创造一个新的符号吗？在不同的文明中出现了不同的答案。或许来自于计数符木（**古时用，上有刻痕，记载交货、欠款等的数量——译者注**）上的一个笔划，或许来自市场



上人们常用的手势，罗马人用X表示含有卌 卌个数量单位的一堆物品，V表示卌个（V代表的数量是X的一半，也是X的上半部，一只手所能代表的数量单位）数量单位，因此，按照从左到右书写单词的习惯类推，XV代表三个5。他们用XX（两个10）表示四个5，而不是冗长的VVVV或XVV。

那么，γ+Λ问题就变为

X+XVIII=XXVIII。

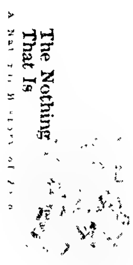
这看上去似乎是一个很有前途的方法，但当你为庞大的数目而写长串的X而感到厌烦时，这个方法也陷入了困境。至少你又回到了不得不接二连三创造新符号的情况。罗马人用L代表50，所以LX是50多10，就是60；XL表示比50少10，就是40；C代表100，D代表500，M代表1000——随着债务或少女的嫁妆不断增加，计数的数目越来越大。用以旧符号为中心加一个3/4边框的符号来表示原数值的10万倍。因此，当利维亚（Livia）给盖尔巴（Galba）留下了5 000万塞斯塔斯（sesterces，古罗马货币单位——译者注）的遗产，她的儿子提比略（Tiberius，公元1世纪14~37年间为罗马皇帝——译者注）皇帝——对任何人都毫无感情，当然对盖尔巴（尽管是他母亲的继承人）也不例外——坚持认为|D|应该读做 D̄，是50万塞斯塔斯，quia notata non perscripta erat summa（“因为这个总数是个符号，符号没有写完全”）。我们可以想像从皇帝口中说出这样的话，自然是金口玉言，不能再更改了。

这种计数方法每天都产生很多问题，并不仅仅是法律上的纠纷。

43+24等于多少？对于罗马人来说，就是

XLIII + XXIV，

把两个数字对齐，无法自动得出答案是LXVII。过



去，用这样的数字体系描述一个大数目是困难的（即使用后来缩写的罗马字母表示也是困难的，1999是MCMXCIX：

M	CM	XC	IX
↑	↑	↑	↑
1 000	比1 000少100是900	比100少10是90	比10少1是9）

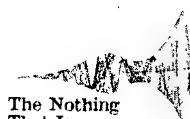
用它们计算更是令人望而却步（想像着尝试一下减法、乘法，老天，可千万不要是除法）。

我们现在想当然地认为，有一个神奇的天才改进了数字的表示方法，使我们毫不费力地进行计算。令人迷惑的0——代表空洞无物，为这个发明划上了圆满的一笔。

故事起源于大约5 000年前定居于美索不达米亚（Mesopotamia，在今伊拉克境内）的苏美尔人。当你在他们用于记事的黏土块上读到这样的父子间的对话："你去哪儿了？""哪儿也没去。""那你为什么来晚了？"这时你会感觉5 000年前的事就像刚刚才过去一个晚上。

苏美尔人使用一进制和十进制来计数，也用60进制。乍一看也许有点奇怪，想想我们现代也还在使用这样的进制就不足为奇了。一小时有60分钟（6×60=360，圆分为360度，每分钟占6度）。更进一步，我们一年用12个月来计算，一周用7天来计算，一天用24个小时来计算，一磅或一品脱有16盎司。直到1971年英国还使用12便士一个先令，20先令一镑这样的进制。

对这些不同体系的发展进行深入研究，你会发现它们都是相互磨合、相互妥协的历史，你认为神秘离奇的事情其实是最自然不过的了。苏美尔人遇到了与他们度量衡不同的另一种文明，首先是重量单位，然后是货币单位，苏美尔人的60进制很可能就是在处理与这种文明



间的差异时产生的。可以猜想，苏美尔人把某个重量称为1，随之更重一些的是2、3等等，直到10的整数倍；当然也有1/4、1/3、1/2和2/3这样的分数重量。

现在我们设想，如果他们和一个与他们有相同比率的部族间进行商业往来，但基本单位却是他们自己的60倍，你可以想像商人们在换算出他的币值等于多少时是多么的困难。比如，他们贸易伙伴的$7\frac{2}{3}$个单位换算到自己部族的币值中是多少呢（即使是物物交换的贸易，精确的记录也应该保持价值相当）？当你用60为单位重新进行思考时，困难就迎刃而解了。由于$7\frac{2}{3}\times 60=460$，那么就是460个苏美尔单位。另外，60的1/4，1/3，1/2，和2/3都是整数——易于处理。我们永远也不可能知道这种重大决定的细节（签订协定时，喝掉啤酒的杯数和围绕着基本单位的比率是高于还是低于60的讨价还价），但我们确实知道在苏美尔度量体系中，60个谢克尔（shekel，**古希伯来或巴比伦的重量和货币单位——译者注**）是1个迈纳（mina，**古代希腊的货币单位和重量单位——译者注**），60个迈纳是1个塔兰特（talent，**使用于古代希腊、罗马和中东的一种重量和货币单位——译者注**）。

直到今天，我们在用数字计算的路程上似乎也并没有前进多远。如果有什么区别的话，那就是苏美尔人似乎还处在十进制与60进制的混乱状态下。但是如果我们想知道这种混乱状态是如何结束的，我们除了想像几千年前的事外别的什么也做不了。

苏美尔人通过使用中空的芦苇管尖在湿泥块上印出圆或半圆来进行书写，然后把泥块烘干来进行保存（大量的这种记事簿在经历了遥远的岁月后依然幸存了下来，而20世纪60年代写在计算机打孔卡上的文件已不复存在）。最后芦苇管被三棱的铁笔所代替，用它可以写出这

样的楔形符号：；或者旋转一下，改变一下形状，成为一个“钩”：。虽然在大约公元前2 500年，苏美尔人被阿卡得人（Akkadian）征服，但十进制与60进制的混合数制仍被完整无缺地保存了下来，到公元前2000年（古巴比伦时代）数字演变成这样：

1

2

3

4 或者后来是

5

6

7 或者是

8 或者是

9 或者后来是 （对角线代表3×3）

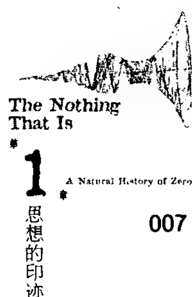
对于10他们用一个“钩”来代替：

所以11是 。

12 是 。

依次类推——就像后来罗马人发明的X、XI、XII（但是没有表示5的新符号，所以15不像罗马文的XV，而是）。20是，30是由3个“钩”组成，有不同的排列形式：，40是4个“钩”，50是5个，在它们之间的数字都是你可以想到的形式：34是，59是。

在这里60进制突然出现了，60也是一个楔形，但是是更大的一个：。像这样从小到大、从右到左书写数



字（就像我们从右到左书写数字一样——感谢他们这样做，虽然我们书写单词是从左到右），63将会是𒁹 𒁹𒁹𒁹，72是𒁹𒌋𒁹𒁹，你自己就能依样画葫芦构造出下面的：120是𒁹𒁹，137是：

𒁹𒁹　𒌋　𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

↑　↑　↑

(2 × 60)　+10　+7

= 120

等等。如果你想进行一次短暂的时光旅行（黏土块、木尖笔、弥漫的羊肉味道对你会有帮助），试着写出217。

你写得出来吗：

𒁹𒁹𒁹　𒌋𒌋𒌋　𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

↑　↑　↑

(3 × 60)　+30　+7

= 180

注意楔形的大小是很重要的：62（𒁹𒁹𒁹）和3（𒁹𒁹𒁹）的惟一区别是第一个楔形的大小。但是手写体总是不断变化的，即使是楔形文字也不例外；人们是匆忙或者粗心的（试着用铁笔写出一个月的账目），被教堂的神职人员保存下来的历尽劫难的成千上万的记录，上面记录着捐赠者的姓名和作为祭品的羊、鱼或鸡的数量。在记录这些东西的过程中，大的楔形可能变小，小的可能变大（或许偶尔也会有像提比略皇帝那样的事情）。那么，这个问题怎么解决呢？

直到有人想出了一个高明的主意（或者这个主意仅仅只是一个碰巧奏效的权宜之计，谁知道呢）——以楔形的书写位置来代表数值的大小而不论楔形形状的大小，这种混乱的局面才结束。因此，不管楔形是大是小，𒁹𒁹𒁹 𒌋𒌋 𒁹𒁹 总是表示202：3个60，2个10另加2。𒁹𒁹𒁹 𒁹𒁹 表示182：3×60+2。

这种用位置来表示数字大小的体系一旦普及开来，为了一目了然，引入空位和规范的楔形及钩形组就成为必然。就像我们的“754”是表示（7×10^2）+（5×10）+（4×1）一样：

𒁹　𒁹𒁹表示是62，但𒁹　𒁹　𒁹表示是3 661；

$(1 \times 60) + 2$　　　$(1 \times 60^2) + (1 \times 60) + 1$

和

𒌋𒁹𒁹　𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹 是754。

$(12 \times 60) + 34$

$= 720$

这样做是非常奇妙的事情。它不仅仅能让我们很快写出很大的数字（比如1999就将变成这样的表示：𒌋𒌋𒌋𒁹𒁹𒁹　𒌋𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹）

$(33 \times 60) + 19$

$= 1\,980$

而且更重要的是能让我们的运算变得相对容易。举个例子，我们做加法：

$$\begin{array}{r} 43 \\ +14 \\ \hline 57 \end{array}$$

是通过首先把3和4相加，再把4个10和1个10相加。

对巴比伦人来说，他们是这样加的：

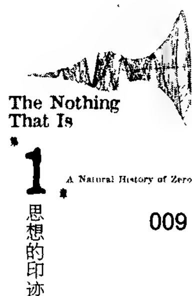
𒌋𒌋𒌋𒌋　𒁹𒁹𒁹

𒌋　𒁹𒁹𒁹𒁹

𒌋𒌋𒌋𒌋𒌋　𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹𒁹

但是如何“进位”呢？这是一个我们孩提时代感到困惑的事情。我们来做：

$$\begin{array}{r} 82 \\ +\ 41 \\ \hline 123 \end{array}$$



（2个单位加上1个单位是3个单位，8个10加上4个10是12个10，也就是，2个10和1个100）。他们这样做：

Y　　<<YY
　　　<<<<Y
———————————
YY　　　　　　YYY
6个10是1个60，再加上原来已经存在的1个60，我们就得到2个60　　3个单位

对于我们，把一个数字移到它左边的数位上，它的值就变成原来的10倍，在巴比伦的表示方法中就变成原来的60倍。当一个数位满了，处理的方法是把这一位去掉10——或60，在左边一位加上1。

索福克勒斯（Sophocles，古希腊悲剧作家——译者注）说："没有磨难就没有伟大事件发生。"引入位置来表示数值的大小固然伟大，但巴比伦人怎么区分180：YYY和3：YYY呢？也就是说，他们怎么知道"3"在个位还是在60位？神庙里的神父从记录中怎么才能知道上一年送给女神的祭品是2只羊呢，还是120只羊？很显然，是通过当时的情况来考虑；就像当你考虑半加仑牛奶值1.55美元，到多伦多的廉价机票价格也是155美元，你是知道小数点应该放在哪里的。

但是，生活变得更加纷繁复杂了，事物的数目更大了，仅凭各种情况来判断数目的大小变得不再可靠。忍受了上千年的模棱两可后（是这方面的不同进度使文明有了明显的差异？），在公元前6世纪~公元前3世纪，终于有人创造并使用了一个具有划时代意义的符号 ⩤，这个符号或许是在定义两列楔形如何分开时独立出来的单词，也或许是来自另一个语言中的符号。无论如何，它有效地表示了这样的含义："这一列什么也没有。"因此：

$$(2 \times 60) + 5 = 125$$

但是

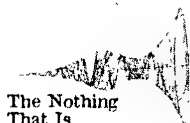
$$(2 \times 60^2) + (0 \times 60) + 5 = 7\,205$$

$= 7\,200$

正如你所想像的一样，人们有各种各样书写0的方法，随心所欲，所以就有了下面这样的书写方法：

和 甚至是 或者 。

在启什（**Kish，美索不达米亚的古代城市，位于今天伊拉克中部幼发拉底河流域。其众多的遗迹成为关于苏美尔人文明的有价值的考古学证据——译者注**）遗址发掘出的一个记事簿（大约公元前700年）上，记事员是用三个“钩”而不是两个倾斜的楔形来表示他的零，它们看上去像30；而同一时期的另一个记事员则只用一个“钩”来表示他的零，以至于与10很难区分。难道是粗心吗？或者这种变化表明我们已经非常接近了表示零的最早独立符号，它的意义和形式正在慢慢形成吗？



然而，这种零的标记只被用在数字的中间，从来没有在数字末尾出现过。从你的存货清单上看你的库存面包，到底是够7个人食用呢，还是够420个人食用？这可能需要你研究不同的时期、不同的地点、不同的人们，才可能最终知道。

正如狂欢节时人们常说的那样：狂欢时，你在交叉路口丢失了东西，就会在连接它的路上拾到东西。有所失，就有所得，零从来没有被用在数字末尾使我们失去了准确性，但也使我们得到了灵活多变。由于没有零在数字的末尾，我们将不能区分出2、20、200这些数字，所以计算乘法2×3、2×30或2×300是一样的容易：答案

永远是6，然后加上可以凭常识或当时情境得到的数量级。因此，当有人声称灵活多变是这种符号的最大优点时，也就不足为怪了。

在巴比伦后来的岁月中，有人第一次给了“空空如也”一个“居所”和名字，不管这个人是谁，都没给自己留下任何东西。也许那一对楔形符号是对他的历史地位最合适的纪念。



第2章 希腊人没有这个字

The Nothing That Is

A Natural History of Zero

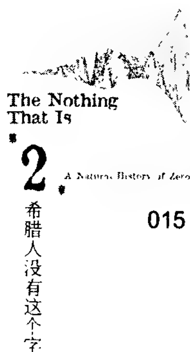


为什么解决零的表示问题的过程如此旷日持久呢？为什么这以后使用零的步伐仍踌躇不前呢？为什么零已经浮出水面又没入水中，若隐若现？原因在于我们思想与语言相互转化的方式和由此产生的困惑，不管是过去还是现在。这也是一种娱乐，想想我们从格什温（Gershwin）的歌里得到乐趣：

> 我得到了足够的零，
> 但是一个已足够。

我们怀着强烈的兴趣，反复思考这句看似荒诞不经的话，品味它字面与内涵的不同。

这种似是而非的说法在古代迅速成为流行。公元前8世纪末的某个时候，编辑整理《奥德赛》（Odyssey，**古希腊荷马所作史诗——译者注**）的歌唱家在奥德修斯（Odysseus，**《奥德赛》中的主人公——译者注**）刺瞎了独眼巨人波吕斐摩斯（Polyphemos，**独眼巨人之一**）的故事中研究过它，独眼巨人（Cyclops，**在这里指波吕斐摩斯——译者注**）吃掉了奥德修斯的几个同伴，要不是奥德修斯骗过了他，并刺瞎他的眼睛，剩下的同伴也会成为他的盘中餐。



奥德修斯让波吕斐摩斯喝下烈酒，当独眼巨人叫道：

> “再给我一些酒，立刻把你的名字告诉我，
> 以便让我给你一件奇异的礼物让你称心如意。”

奥德修斯一次又一次倒满他的酒碗，说：

> “巨人，你想知道我显赫的名字，但是我要求你遵守诺言，给我这份奇异的礼物。
>
> 事实上，我的名字叫‘没有人[Oὖτις

Outis]’。我的父亲和母亲叫我‘没有人’，同伴也这么叫我。”

他这么一说，波吕斐摩斯立刻残忍地说：

“‘没有人’，我先吃掉你的同伴，最后再吃‘没有人’，这就是我给你的奇异的礼物。”

一等巨人醉倒过去，奥德修斯和他的同伴们就用尖树桩刺瞎了他的眼睛，波吕斐摩斯发出了痛苦的喊叫声，别的独眼巨人都跑来了，他们在他封闭的洞穴前向他呼喊：

“波吕斐摩斯，你为什么被人战胜？

在这样美好的夜晚，你的叫声让我们无法入睡。

不可能有人敢不顾你的反对带走你的羊群吧？

不可能有人正在用诡计或暴力伤害你吧？”

残暴的波吕斐摩斯在洞穴中跟他们说：

“我的朋友们啊，‘没有人’正在用诡计和暴力伤害我。”

他的朋友们听到这个以后，劝说他要耐心承受上帝给予的一切，便回到自己的洞穴中。所以奥德修斯和他的同伴们一边逃跑一边嘲笑瞎眼的巨人。

你一定会认为，这个能够整理和津津乐道这样一个笑话的人给“无”一个名字，并像奥德修斯对巨人所做的那样灵活使用“无”都是轻而易举的。但是，在荷马时代或古希腊都没有零的踪迹，事实上，直到亚历山大时代（这个笑话已经不复辉煌的时候）也没有。如果在



你面前看不到或思想中也不存在计算板的数位，一个数位上的筹码已经满了要进到前一位而留下一个空白在后面——如果你没有符号来代表那些空的或填满的位置，并从你熟练的操作中创造一种语言——那么你就不可能提升你的手头工作，竭尽可能做的就是：吸取并简化眼睛所看到的，使得它们能方便你的工作。

荷马时代的希腊人以10（有时以5）来进行分组，以这些词的第一个字母来代表数字符号，像罗马人后来做的那样从左向右成串地写下这样的符号，所以318就是300+10+5+3：

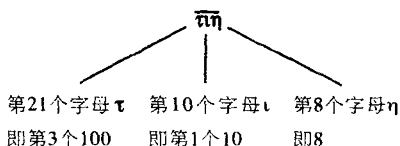
HHH		Δ		Π		∣∣∣
↑		↑		↑		↑
3 × H	+	1 × Δ	+	1 × Π	+	3

这里，H，Δ和Π分别为Hekaton（100），Deka（10），Pente（5）的第一个字母。

没有位置符号，因此后来罗马人在估算时就遇到了麻烦。更糟的是：那些早期希腊人没有把数字从他们的计数中完全抽象出来，因此，偶尔地代表货币单位与数量的符号会合成在一起：他们写 ⊢T⊣ 而不是HT来代表100塔兰特（T）。就像我们写 $ 代表1美元，写 $\!\!\!\$$ 表示11美元，让随意涂鸦的装饰品来引导我们，而不是描画特别抽象出来的符号。

在5世纪的雅典，高度发达的希腊文明时期，一场我们无法知道原因的改革席卷而来。它使希腊字母表中的24个字母加上另外3个字母分别代表数字的前9个（1~9），然后是前9个十位数字（10~90），前9个百位数字（100~900）。所以10的符号是 ι（iota，希腊语第9个字母），扩展后的字母表中第10个字母；11是ια——但是第11个字母κ代表20。这时10个一组的表示方法完全被掩盖了，

例如318变成了



画在它们上边的那条线就是把这个数目与一个可能的词语区别开来，例如，τίη 表示why（为什么）。这种混乱会变得更严重吗？会，而且事实正是如此：不同的时期，不同地点，混乱不是在减少，而是在上升，而在有些时候，所有的规则都会被忽视。装饰性又一次推动了这种计数方法吗？或者，只是一种希腊人的固执精神？

不管什么原因，位置符号的缺少意味着他们仍然没有代表零的符号。可能是亚历山大时代的希腊人发现了零在计数中扮演的重要角色，在公元前331年，他们侵略了巴比伦帝国，除了掳走了妇女和金子，还带走了零，在他们公元前3世纪的天文学著作中发现了用符号O表示零。为什么是这个中空的圆？它来自哪里？我们知道，曾有一段时期书面上使用两个巴比伦的楔形来表示零。可以想像，希腊人把这个"舶来品"铸在自己的硬币上。这一切确切地发生在哪里、什么时候都无从查考，证据已经随时光灰飞烟灭。但是人类总是设法去回答更困难和更有趣的"为什么"的问题。像托马斯·布朗（Thomas Browne）爵士曾经说过的："塞壬（Siren，一群女海妖之一，用她们美妙的歌声诱惑船只上的海员，从而使船只在岛屿周围触礁沉没——译者注）唱的是什么歌？虽然令人迷惑不解，但不能制止我们去猜想。"当然，在研究这个问题的书中不乏各式猜想，却都像前一年秋天脆弱的落叶一样不堪推敲，还有埋葬在摩洛哥陵

墓中的文章和德国人辛勤留下的手稿，都对这个问题做了猜想。

最普通的解释是零来自希腊语的第15个字母，οὐδέν的第一个字母，意思是“没有东西”，像奥德修斯的名字Οὖτις，或仅仅源于 οὐκ，“不”，就像我们的“无”，可以看出，荷马时代的体系中，很多符号都来源于数字名的第一个字母，我认为这种解释是仅有点儿沾边的证据，在后来的希腊， οὐδέν 变为 μηδέν 。15世纪拜占庭（Byzantine、东罗马帝国时期）时期的希腊文中，我们发现一个有点像μ的符号 ч 来表示零。

这整个解释被一位希腊天文学的权威轻易地推翻了，因为希腊人已经给omicron（希腊语的第15个字母）赋值为70，他说，这里的符号是一种随意的抽象。或许是这样；但是在希腊数学中，由于首字母缩略字的原因，圆圈至少还出现了两次。活跃在公元3世纪亚历山大时期伟大的数学家丢番都（Diophantus），选择 $\overset{\circ}{M}$（因为“mo”是希腊表示单位的词monad的前两个字母。没有人会因为 $\overset{\circ}{M}$ 表示700 000而混淆。表示70的O放在表示10 000的M上。）作为一个把几万与更小的数目区别的符号。阿基米德时代的天文学家们用 $\overset{\circ}{\mu}$ 表示“度”，在希腊语中是moira。“o”沿用了2 200多年,我们现在依然用这个符号来表示我们的“度”，这是令人鼓舞的。

如果你倾向于希腊人发明零时没有参照他们的字母表的观点，那么留意一下自然界给我们提供了很多圆形中空的东西，这个观点的武断性也就大大降低了，从一个张开的嘴巴到月亮朦胧的轮廓，从火山口到伤口。纳博科夫（Nabokov）曾写过：颅骨、种子和所有美好的东西都是圆的。

不管零的符号怎样进化，在它上面总有一些奇特的条

纹，ઠ或者 ō 或 ō 甚至有时是 ō 。这些装饰被托勒密（Ptolemy，大约公元150年——译者注）这样的天文学家们用来保持符号的整齐性。我们在他的《至大论》（*Almagest, "The Greatest Synthesis"*）一书中，使用了三段数来表示三角形中角的度数，O既用在中间也用于了两端（像我们一样，他在巴比伦60进制中使用度、分、秒）。所以 $\overline{\mu\alpha}$ ō $\overline{\iota\eta}$ 代表41°00′18″，ō $\overline{\lambda\gamma}$ δ 代表0°33′ 04″。装饰条不正表明零仍然不具备一个数字的属性，被亚历山大时期的希腊人像我们使用标点符号一样使用它吗？

更进一步的证据来自于某些新出现的问题，使这项研究继续下去。我们仅存的《至大论》的手稿是拜占庭时期托勒密留下的。而且在这些手抄本上，仍保留有数字字母名上的条纹，但零上面的条纹经常消失了——所以零仍然区别于数字符号（但现在已经跟以前有所不同了）。

更准确地说，这里的O表明的是计量单位种类（度、分、秒）的缺失，但是仍然不能与别的数字一起组成一个数目。比如你有38个鸡蛋，你可能说你有3打零2个鸡蛋——一般不会说有两打零14个，虽然这样在数学上是正确的，英国的币值在十进制以前也是这样的，说你有5镑22先令14便士是错误的习惯用法，实际你有的是6镑3先令2便士。这两种计量都是我们更早时期处理数目方式的倒退，那时的计量单位只是为了规范不同“堆”的附加物。计算物体的数量要符合约定俗成。从书写一个符号表示“这一数位什么也没有”到像106或41.005°（41°00′18″的数字形式）这样的数字出现仍然有一段很长的路要走。

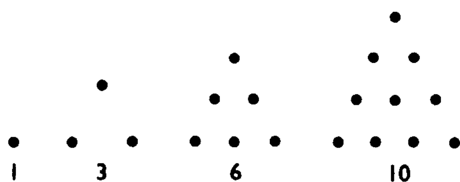
既然零几乎不会在希腊人天文著作以外的地方出现，为什么希腊人没有继续这条路呢？而且，为什么这样一

个有创造力的民族，在有位置符号写法很长时期后还没有创造零？在他们能力的顶峰时期，为什么没有在已受启发的情况下走得更远？

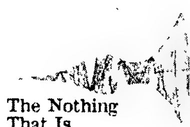
你可能提出异议说一切归于他们对埃及人的推崇，埃及人既没有零也没有表示位置的数字书写方式。但是对希腊人来说，推崇往往会转变为竞争，他们对粗俗的东西没有耐心（埃及人的数制欠缺优雅）导致我们对奉为科学精神的无休止的混乱；从头到尾，是好奇心带来了灵活多变。现在仍然是这样：我曾偶尔问一个希腊朋友他有多少同胞在巴黎生活。他耸耸肩说："谁知道呢？但是我会很快得到答案。"他飞快地冲出我们的咖啡桌，跑向最近的墙，开始用手指钻洞。"你在干什么？"我大惑不解地问。"不知道，"他说，"但是希腊人是好奇的，不用多久在巴黎的每个希腊人都会来这儿，提出问题并且给出建议。"

那么，如果不是对埃及人充满敬意，怎么能解释希腊充满机智的历史上的这个怪现象呢？非常奇怪的是计算在他们当中并没有多少声望。那只是他们称做搞后勤和商人之类的人才做的。不是所有的希腊人都轻视商业，他们很擅长于此，整个雅典帝国可以证明——但是，他们的悠闲阶级却是轻视商业的，那些仍有作品存世的思想家就是这个阶级的。他们在几何学方面却着力颇多，成果卓著。

这些几何学家——在他们中间出现了苏格拉底和柏

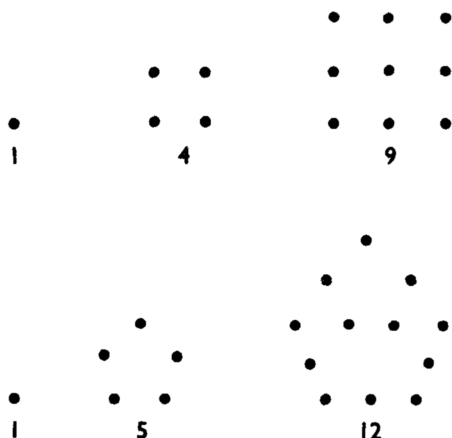


三角形数

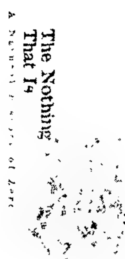


拉图——通过画在沙地上的图形用几何学的方法解决算术学的问题。1、3、6、10等等是三角形数，因为你可以通过用一行点来增大等边三角形来获得。

这样的图案产生了更进一步的洞察力——按照正方形数、正五边形数的顺序，例如：



一些多边形数字



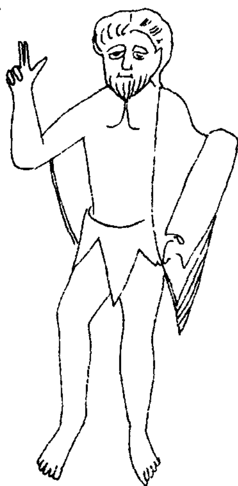
但是没有零，也不需要零，因为他们不是在计算而是希望通过这些图形来揭示宇宙中存在的规律。

这把商人置于何种境地了呢？他们使用一种哲学家永远也无法描述的装置，今天你仍然能够看到他们的后代在酒馆中玩着西洋双陆棋游戏（**15子棋是供两个人玩的木板游戏，通过掷骰子来决定棋子移动的步数——译者注**）——计算板。甚至在这之前——虽然这些计算板可以追溯到至少公元前7世纪（巴比伦人可能早在1 000年前使用过），他们用手指通过灵巧的方法飞快地进行计算（你仍然能看得到，在市场上，女人们弯曲和绞起手指，用于某种有人称做“女人的算法”中，或者叫“提花马赛布算法”）。

梭伦，古代雅典伟大的立法者，在他的一篇诗歌中把暴君的喜好和计算板相比，它的价值依赖于人们一时

兴起把筹码从一个数位移到另一个数位。这个隐喻告诉我们关于零的决定性作用——特别是当我们看到这个隐喻在5世纪后被历史学家波利比奥斯夸大后。

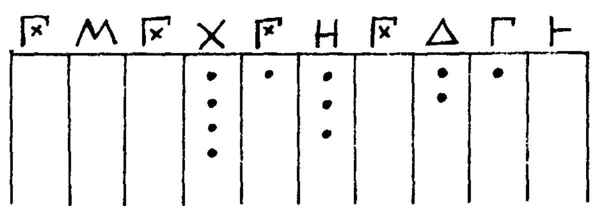
围绕在国王周围的朝臣实际上像计算板数位上的筹码一样。因为，根据计算者的意愿，他们可以价值仅1/8奥卜尔（obol，**古希腊银币——译者注**），也可以是一整塔兰特（talent，**古希腊银币，大约是1/8奥卜尔的30万倍那么大——译者注**）。你应该注意到计算板上从左到右的数位当然没有表示零的［一些希腊计算板从左到右明显地有一些数位分别地代表1个塔兰特等于6 000 德拉克马（drachmas，古希腊银币名），然后是1 000、100、10和1德拉克马，之后是1、1/2、1/4和1/8奥卜尔(6奥卜尔是1德拉克马)，这些是用做计算钱币的计算板，就像那些计算房中老式的计算板，这些计算板后来进入我们的银行，也就成了计算用的长形工作台］。因为，换句话说，“无”（零）不是一样东西，也不是一个数字，而是计算板的一种状态——经常是瞬时的状态。手指计算也是这样，如



比德用手指符号表示2 000

果我们用更晚一些的体系，探究一下比德副主教写于大约公元730年的“关于用手指计算和交流”手稿，“零”用手指松开或平常位置来表示，换句话说，它根本就不用手势示意。

希腊做计算的人几乎不需要表示数量的名称，因为他们可以用数位上的筹码来说明：



4 825：在X（=1 000）位有4个筹码，所以是　4 000

在𐅅（=500）位有1个筹码，所以是　500

H（=100）位有3个筹码，所以是　300

Δ（=10）位有2个筹码，所以是　20

Γ（=5）位有1个筹码，所以是　5

4825

但是，非常糟糕，甚至发展到需要名字的时候，零也不在其中。

我们进行一两页离题的讨论：这些计算板告诉了我们一些关于零的来源的推测。在阿普利亚区（Apulia，**意大利东南部的一个地区——译者注**）出土的公元前4世纪的一个有红色图案的精巧的双耳喷口杯，我们称它为大流士（Darius，**古波斯帝国国王——译者注**）花瓶，在这上面可以看到皇家司库在计算被征服国家呈上的贡品的价值，这些国家的代表躬身站在他面前。他坐在一个有币值符号的计算桌子旁，其中一个是O，奥卜尔（Obol）的缩写，一个硬币的价值，就像你看到的，几乎一文不值（他们运走尸体时，把一个硬币放在死者的舌头下面来付给摆渡到上帝那里的船夫）。几乎一文不值？

如果你手头没有表示“无”的符号，一个跟它价值相近不可以吗？在科普特文中，用回归线附近6月正午时分的影子（根本就没有影子），据说有半脚长，来避免不得不说到的零。或者如哈姆雷特的朋友霍雷肖这样对我们说："太难以理解而不能这么考虑？”我个人认为不是计算板上的数位而是筹码给了我们一直寻找的线索。用做筹码的卵石一定有点圆，因此在书写中就很自然地用实心的点●表示，因此，用图形来表示在数位上一个筹码也没有就是一个空心的点O。从一个图形到符号（数字到数字）不是一个很长的历程：思考一下罪犯们简洁的黑话“给两个O一个位置”就是粗略查看的意思，并且语带双关，表示一双监视的眼睛。为什么圆形的O经过几世纪拉长为0了呢？因为劈开的大羽毛和钢笔尖在画一个连续的圆要比画两个垂直并弯曲的笔画困难得多。



大流士的司库坐在他的计算桌旁

如果符号方面的完整到缺失，也就是●到O，对你来说，仍然是太大的一步，有一个相似的推测可以缩短这一步。可能不是希腊的几何学者在顽童似地把玩商人们的筹码时偶然地发现了三角、正方、多边形数字的数

字。他们不应该是惟一拿这些筹码做上述用途的人：2000年后年轻的歌德就热衷于在父亲的计算板上把石子排列成星座的形状。我们从柏拉图可以推断几何学家们至少有时在沙上涂写他们的数字，如果他们也在沙地上用卵石得到成型的数字，那么商人们——或者不管是谁使用筹码来计算，看到这些图案时也会看到拿掉一个筹码后的结果：在位置上留下了一个圆形的压痕，是O代替了●。霍雷肖又要对这些假设清清嗓子发表意见了吗？那么撒了沙子的计算板就会让他对不可能的事感到满意。

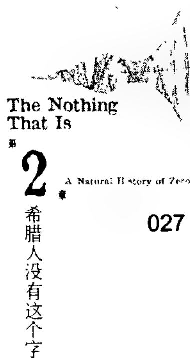
从这个分支开始追溯，我们能得出结论，希腊人用一种形式书写数字，另外一种形式来进行数字计算。雅典贵族的势利不能完全解决这个分歧：一些隐秘而且更深入的东西在起作用——语言的重点和思想的重点在互相转化。看那些迅速移动的卵石你并不觉得可靠——像旧骗局的受害人将告诉你的那样。阿里斯托芬(Aristophanes)，5世纪雅典喜剧作家，在他的一本作品中，有一个人物这么说，城市的财政不应该用卵石计算而是用手指。但是手指计算为什么更值得信任？它一样不能留下永久的记录。需要一种代码既能够灵活使用，又利于思考，还要足够安全来抵制像提比略皇帝那样的人。你注意到我们仍不得不老是要做这样的事情：在你的支票上必须不但要写数字，而且要用词语写出数字，银行将核对它们，这样才可以减少被伪造的可能。

计算的方式让我们清楚：这正是身体与思想分离的地方。想想填满你日常生活的这些成千上万的不可名状的举动：利用声音的抑扬顿挫来表达喜恶，系你的鞋带，做一个煎蛋或一次精确的射击。这些动作是你的身体知道如何去做的，但你试图描述时又总是犯错。但是这不管多么令人惭愧，惟有这些招数能用语言表达出来时，

我们才能从中抽象并带入我们的思想。零——在行动与事物之间保持平衡（数字是什么，它什么时候成了形容词或名词？），让使用者不管什么时候停下来思考他们正在干什么时都会感到迷惑。

希腊人蒙在这个不被称做数字的数字（零）上面最后一层面纱：我们知道，它也是蒙在其他数字上的面纱。语言出现于我们的行动与思想之间，但是它本身有两个层面，口头的和书面的。书写的永久性使它在两者交锋中占了上风。但是不总是这样，那个黄金时代的希腊人有自己的观点，一些是基于他们歌者的天赋，他们可以口口相传记住像《伊利亚特》（*Iliad*）和《奥德赛》这样鸿篇巨制的史诗。记忆常常被等同于知识，充满智慧的知识——因此文章（我们文化的宝库，与祖辈的联系）的记忆对他们来说是类似于乐谱的东西：当音乐会上的钢琴家面前摆着乐谱才能完成演奏时会使你感到扫兴。或许这就是为什么柏拉图会写对话。这些对话是他们的语言，却不被这种语言接受。他在《斐德罗篇》中故意地使苏格拉底证明这样一个问题，书写会导致健忘而且只给出了真理的外表，而不是真理本身。这可能也是为什么更早的哲学家赫拉克利特（**Heraclitus**）的格言格外简短而令人困惑，事实上，希腊人就是因为这个而发明了反语，不说出你想要表达的意思的全部，而仅仅是说出一部分来表达全部意思。

零也是一种反语吗？它在希腊文中的缺失可能不表明他们不用或不思考它，事实上，或许正好相反。保守秘密的行规遮掩了同时代的毕达哥拉斯（**Pythagorean**）同行们的活动，数学对他们来说是重要的东西，而且它的新加入者为他们关于宇宙秩序的新发现保密（在等级制度中，更为了解了宇宙无秩序状态的人会受到失去理



性的成员的威胁）。他们可能是一些秘密传统的管理者，包括零，后来被迫长期潜行在我们的视线之外。可仅仅在几世纪以后零就在印度出现了。

当然，像狗不吠叫之类的证据永远不可能被庄严的历史所接纳。那些标准的证据使我们仔细地研读一行行的文字，而不是仅仅游离其中。同时思想也热衷于间接地找出前进的方向，两者都无济于事：他们警告你，不管从这里出现了什么符号，不管怎样，都无法代替零所表示的不存在。



第3章 旅行者的故事

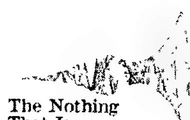
The Nothing That Is

A Natural History of Zero



很久以前的那个秋天，这个世界上发生了什么事情呢？当雅典文明传到亚历山大港，它的影响力达到罗马，它所创造的文明又通过侵略和商业贸易向东方传播，是它在新的环境中改变自己，还是为了吸收它，环境自己改变了呢？我们已经度过了那个几何学繁荣胜过算术的时代，因此我们将期望零能够获得自己应得的地位而盛行起来。下面将介绍这个小小环形符号巨大的描述、解释和调节能力，这个符号从一种语言传到另一种语言，从数学家传到天文学家，并在各门学科间流传，但没有一个人意识到他们所拥有的这个符号是多么的重要。

正如所有的优秀冒险小说那样，不该出现的东西绝对不会在它不该出现的地方出现：举个例子，公元前三世纪，在西西里岛（Sicily，*意大利南部一岛屿，位于意大利半岛南端以西的地中海——译者注*）人们对巨大数字产生了热情。你应该会想到，在研究生长的植物时，必将导致一个表示位置的符号和零的出现，这种表示方法的优点是：不管是存在的还是不存在的各种各样的大量物品，通过抽象和空出该空出的位置来计量它们的数量，表示它们的数字都是一样的。在前面的几章你已经看到了，创造和熟练掌握为大数字所起的名字是多么的困难，而为了获得一个大数字在1的后面加上一个0又是多么的容易。这当然是我们如何勾画那些令人敬畏的和所期望的巨大数字的最佳方法。当我们在比赛谁写的数字最大的时候，最后的胜利者总是那个在前一个人写的数字的最后加上一个零的人——就像都柏林的调酒师，总是设法向已经满溢到边缘的酒杯中再多加一滴吉尼斯黑啤酒（了解了我们给大数字起名方法的改变以后，该如何书写我们向无穷大靠近和想像力不断演化的历史呢？）。然而，一个就像调酒师那样热衷于玩弄那些令人



难以置信的大数字的发明者，对那个能方便表达大数字的零却视而不见。



阿基米德将要被一个百夫长杀害

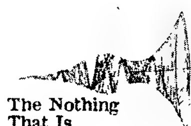
阿基米德（Archimedes，**古希腊数学家、物理学家、发明家——译者注**）出生于大约公元前287年，他的父亲是一个天文学家。在他那些令人惊异的著作中，有一本是送给锡拉库扎（Syracuse，**意大利西西里岛东南部一城市，位于卡塔尼亚东南偏南。公元前8世纪由科林斯殖民者创建，5世纪其国力达到巅峰，但于212年落于罗马人之手——译者注**）国王盖隆的。在这本书中，他向国王展示了如何给巨大的数字命名，这些数字可以不仅比锡拉库扎海岸的沙粒多，而且可以比整个西西里海岸的沙粒多，世界上所有陆地上的沙粒，知道的和不知道的，都能用这个方法表示。而且，他说："我将向你展示，通过几何学证明后的这种方法能使你理解这些我起了名字的数字……那些超过所有沙粒数量的数字……与宇宙具有同样数量级的巨大数字。"

把所有海边的沙子不停研磨，这个难以想像的情景也许只有在神话传说中才会出现。利用阿基米德创造性的一系列乘法，这些细沙的数量可以准确被表达出来。

阿基米德这么说：假定在一个有一个罂粟种子那么大的小堆里面至少有10 000个细沙粒，40个罂粟种子排起来和一个手指差不多宽。为使问题简单，假定每个种子都是一个球体。当这些小球一个挨一个排列的时候，一个小球所占据的空间等于以它的直径为棱长的立方体的体积（*你可以想像，以一个球的直径为棱长画一个立方体，那么这个球将恰好能放入这个立方体中。之所以这么假定是因为当时还没有发现球的体积计算方法——译者注*），所以，当以40个种子排列的长度为一个球的直径时，这个球的体积将是一个种子体积的 $(40)^3=64\ 000$ 倍；并且由于一个种子大小的球体中含有10 000个细沙粒，所以，我们已经讨论了64 000×10 000个，也就是640 000 000细沙粒。用我们现代的符号表示，也就是$4^3\times 10^7$个细沙粒。为了方便，我们把64四舍五入到100。因此，我们将得到在一个直径是一个手指宽的球体里面含有10^9个细沙粒。不要担心所有的这些估计可能都太大：正如你将看到的，夸张是阿基米德的这个游戏的一部分。

现在，让我们继续开始，10 000（10^4）个手指宽度将是一个称为斯忒德（stade，*古希腊、罗马的赛跑场，长607英尺，约185米，大约是1英里的十分之一，后来以此作为一个长度单位——译者注*）的希腊长度单位的长度。一个直径是10^4个手指宽度的球体体积将是一个以一个手指宽度为直径的球体体积的 $(10^4)^3=10^{12}$倍，我们知道在一个以一个手指宽度为直径的球内含有10^9个细沙粒；所以，以一个斯忒德长度为直径的球内含有$10^{12}\times 10^9=10^{21}$个细沙粒。

阿基米德随后引用比他早25年的伟大天文学家阿里斯塔克斯（Aristarchus，*生活在希腊东部爱琴海上的萨摩斯岛——译者注*）的著作中的数据来估计宇宙直径的



大小（古希腊人认为固定星星的地方就是宇宙的边界）。阿里斯塔克斯坚信地球是绕着太阳转的，他的这个想法可是比哥白尼的想法早了很多年。根据阿里斯塔克斯的观察和计算，阿基米德先假定一个球（称它为S），这个球的半径是地球到太阳的距离；然后他假定下式成立：

$$\frac{\text{地球的直径}}{\text{S的直径}}=\frac{\text{S的直径}}{\text{宇宙的直径}}$$

通过这个式子，他得到宇宙的直径是100 000 000 000 000或者说是10^{14}斯忒德（计算过程中对阿里斯塔克斯的数据进行了修改）。为此宇宙的体积就是以一个斯忒德为直径的球体积的（10^{14}）$^{3}=10^{42}$倍，以一个斯忒德为直径的球可以容纳10^{21}个细沙粒，所以如果宇宙中充满细沙粒，那么这个宇宙中细沙粒的数量就将是$10^{21}\times10^{42}=10^{63}$。

"盖隆陛下，我推想，"阿基米德说，"对那些没有研究过数学的人来说，所有的这些看起来好像是难以置信的，但是对于一个数学家来说，这个证明将是令人信服的。正是出于这个原因，我想你花费时间来学习这个东西将是值得的。"

在20世纪40年代，两个纽约人估计科尼岛上细沙粒数目应该在10^{20}数量级；现代科学估计，在我们现在意义上的宇宙内含有的所有小粒子（比细沙粒要再小很多的粒子）的数量应该在10^{72}~10^{87}数量级，我们现在观念上的宇宙可是比阿基米德所说的宇宙要大得多的，考虑到这些，你将不得不说，阿基米德的估计并不完全是那么糟糕的。

这些是希腊人洞察力引人入胜的应用，他们通过类比周围世界来理解遥远的世界。但是，当你意识到阿基米德当时并没有10的乘方这样表达方便的符号，所有的一切都是使用他们那个时代意义上的零来完成的，这些

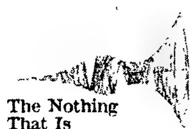
会使你感到更加惊奇。

“阿基米德为何错过发明这样方便的符号呢？”卡尔·弗里德里希·高斯（Karl Friedrich Gauss，**最伟大的数学家之一，对阿基米德很崇拜——译者注**）这么问道。在19世纪，他这么写道：“如果阿基米德发明了这样方便的符号那该多好啊！现在的科学不知道要发展到什么程度了！”但是，事实是阿基米德一直致力于发明数的名字而不是数字，希腊最大数字的名字是“米瑞亚德”(myriad)，表示10 000。这个名字可以让它表达一个米瑞亚德的米瑞亚德（10^8）这样的数字，随后，他发明了一个新的术语，任何一个小于10^8的数字（包括10^8本身）称为一个第一级的数。

然后，他用一个米瑞亚德的米瑞亚德（10^8）作为单位来表达第二级的数，因此，第二级数的最大值就达到了10^{16}（我们可以这么说是10^{16}，但他不能这么说）；接着，把10^{16}看做是第三级的数（该级数的最大值是10^{24}）的单位，依次这样类推下去。那么，那个不可思议的巨大数字10^{63}就是一个第八级的数。

但是阿基米德并没有停在那里，事实上，他刚刚开始。阿基米德留下了这个充满了沙子的宇宙，把自己也缩小到看做一粒细沙，他不断累加数量级，甚至把数量级达到了10^8以上，从$(100\ 000\ 000)^{99\ 999\ 999}$到$(100\ 000\ 000)^{100\ 000\ 000}$就惊人地足够包含所有的数字。

我们做到了吗？几乎不能。所有的这些数量级(最大的数量级是那个起了名字的10^8）组成第一周期数($0\sim(100\ 000\ 000)^{100\ 000\ 000}$**之间的数——译者注**)。如果你看到阿基米德自己的话，那么你的思维就会不自觉地离开现在讨论的问题，感觉就好像是艾丽丝掉到了仙境里面，嘴里还说着：“猫吃蝙蝠吗？蝙蝠吃猫吗？”这样



不知所云的话。阿基米德是这样说的：

> 把第一周期数的最后一个数字看做是第二周期数的第一级数的单位。接着下去，把第二周期数的第一级数的第米瑞亚德的米瑞亚德（10^8）个数作为第二周期数的第二级数的单位。

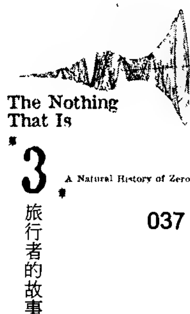
也许，盖隆国王读到这里读不下去了，所以，他也没有能看到阿基米德的最终结论：

> 让这个进程继续下去，以第米瑞亚德的米瑞亚德周期数的第米瑞亚德的米瑞亚德级数的单位为单位，达到这个单位的米瑞亚德的米瑞亚德倍。

简单地说，用我们现在的符号表示，数字的值达到了$10^{80\,000\,000\,000\,000\,000}$。当然，在他的观念里的宇宙或者我们现代的宇宙中都不可能有这么多的细沙粒来对应这个数字；如果我们一秒钟数一个数的话，甚至从宇宙大爆炸开始到现在也依然没有足够的时间来数完这些数，因为阿基米德的第一周期数的最后一个数是1的后面加上8亿个零，而这个数（$10^{80\,000\,000\,000\,000\,000}$）又是它的$10^8$倍。

如果要使那段模糊的历史变得有意义，我们就需要思考：有些表达方法为什么没有被采用？在这个过程中阿基米德做了什么？零为什么没有出现在他的发明中呢？一些人说他的《沙粒计算表》是研究基本粒子相互间作用力的数学表达（tour de force），你可能认为这完全是希腊人在开玩笑：因为柏拉图说我们是上帝的玩物，所以我们应该玩一些高尚的游戏——阿基米德非凡的工作，由于没有任何可以想像得到的使用价值，所以一定是一个百无聊赖的谐谑曲。他的目的是想贬抑一下国王

呢，还是想享受自己在研究大数上超过他的前辈的那种荣耀呢？举个例子，阿基米德的父亲菲迪亚斯（Phidias），在那个时代已经宣称太阳的直径是月亮直径的12倍，而阿基米德断定这个数字应该是30倍（他也许很乐意知道实际上应该是400倍）。阿里斯塔克斯在他的一个计算中使用了一个令人畏惧的数字71 755 875，在这方面阿基米德向前跨了一大步。就像我们的孩子们比赛谁能记得最大数字那样，在阿基米德时代，数学家之间是不是存在着这一类竞争呢？阿基米德同时代的艾派芳尼斯（Apollonius）似乎就用自己的一套给大数字命名的方法对阿基米德的《沙粒计算表》做出了回应。随后，阿基米德计算了一个问题，这个问题的答案是如此的大，如果我们写出这个数字的话，那将占据47页的空间（用阿基米德的方法，这个答案应该是："7个单位的第3米瑞亚德又5 819级数，7 602米瑞亚德又7 140个单位的第2米瑞亚德又5 818级数……"）。当你了解到数学家依然是这样相互促进，并且这种促进会无限下去，你会感觉很好玩——或者你被搞糊涂了。



更进一步说，难道阿基米德是在向我们展示一种如何尽可能具体思考很大数字的方法？给了我们一种分级思考数字的方法，而不是面对整个巨大的数字，这种方法使我们能够把无穷大和大数字区分开来。正如我认识的一个数学家最近说的那样："大数字确实太大。"

我们这儿看到的在语言和思想之间相互促进的一幕并没有导致零的出现，相反，这种促进故意避免这个方便符号的出现吗？在《沙粒计算表》的开始部分，阿基米德说了这样一段奇妙的话：

> 有一些人……认为还没有这样的数字被命

名，这些数字足够的大，以至于可以超过地球上任何一个地区的细沙粒。但是，我将试图向你们展示……这些被我命名了的数字……一些超过……能填满整个宇宙的细沙粒的数字。

为什么重点落在了命名上？想一下圣保罗写在《以弗所书》（Ephesians，基督教《圣经·新约》中的一卷）上的话，他这样说道：

每一个被命了名的名字，不管是这个世界上现在存在的名字，还是将来会出现的名字，都远远高于所有的公国、所有的权力、力量和主权。

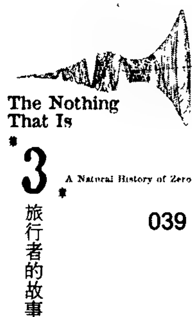


在古代人的意识里，所有存在的事物必须有一个名字，难道所有的现代人都没有古人的这种意识？很多孩子都拒绝接受数字将无限发展下去（仅仅给前一个出现的数字加上一个1就可以让数字增大）这样的论点，因为他们认为没有足够的名字命名数字。对他们来说，一个古戈尔（googol，10的100次方，1后面100个0）和一个古戈尔普勒克斯（googolplex，在阿基米德的思想里，即10的古戈尔次方）是一样的，因为他们虽然很大，却有着自己的名字。我认识的一个7岁的小女孩这么说，所有的数字中最大的一个是23 000。"那么，23 000加1呢？"有人这么问道。她想了一会儿说："好吧，我错了。"在这种原始的冲动下，人们使用了一切努力来给很大的数字命名，像称10^{366}为普瑞末-外基斯末-森提莱恩（primo-vigesimo-centillion），称$10^{3\,000\,003}$为迈利夫鲁欧斯-米利-米利莱恩（mellifluous milli-millillion）。我们的一个最基本的数字是10^{63}，或者说是1的后面有63个零

的那个数字，这个数字使我们的想像力受挫：可它仅仅是有几打（一打表示12个）零的数字罢了。

阿基米德使用米瑞亚德的米瑞亚德、级、周期来代替使用零，给出了一个很实用的理解大数字的方法——利用级、周期来类推，把那些我们无法理解的巨大数字放到离我们更近一些的地方来理解。当然，还有其他的方法来满足那种原始的冲动：比如，用恐惧来代替敬畏。比阿基米德晚1800年的约翰·多恩（John Donne）在他的一次大斋月的训道中这么说：

> 人们已经计算了如此多的细沙粒，这些沙粒足够填充地球和苍穹之间的巨大空间：我们发现，几行零就可以描绘和表达那个数字……，但是，如果每一个细沙粒都代表那个巨大的数字，然后再用那个数字把它们相乘起来，那么，得到的这个不可表达的和无法理解的巨大数字令人惊恐。



第4章 向东方传播

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



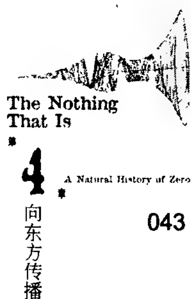
我已经指出抽象的思考和想像力是一对竞争对手，为什么一个繁荣起来必然会以另一个的牺牲为代价呢?无论你把时间向前推多少年，计数和命名都一直是孪生的，在荷马的航海日志中，计数和命名被这样写道：

> ……这对孪生兄弟生活在海瑞亚（Hyria）和多石的奥立斯（Aulis），在伊泰恩瑙斯（Eteonos）幽深的山谷中，游荡在斯靠亦瑙斯（Schoinos）和斯靠劳斯（Skolos），在广阔的米凯莱扫斯（Mikalessos）上玩耍……

甚至在表达思维的这两种行为时（计数，命名）,我们的话语也可以是平行的：我们在讲故事的同时在数念珠，计算账目的时候讲述我们过去的传奇。

从简单的计数到寻找大量的数据之间的关系，数学就这样慢慢地发展着，我们还确信给数字起名为这种发展推波助澜，我们让每一个名字尽可能含有特别的意义，听到它的发音就能让我们知道和想像到它的含义。接着，连接这些起了名的数字，就可以建立起来一种全新的表达体系，这种表达体系将给我们带来全新的空间，而不是原先的狭小空间。

问题是，为了更加关注这种关系，我们就必须把我们所要连接的事物简化为单纯的一点——然后使这些连接符号化，这种表达体系将继续扩展。任何过于扩大节点的行为都将使这种连接陷入崩溃。不要在过去的旧体系中犹豫不前，必须跳入到新的表达体系中去。这种递归的抽象方法在推动数学发展中是一个非常重要的要素，把你刚才看到的美景省略掉细节，保留它主要的东西才能使看到的风景在你的大脑中留下更深的印象。歌德把数学家和法国人放在一起比较时有一点惊异。“无



论你告诉他们什么，”他说，“他们都会把你说的东西转化为他们自己的语言，并且所有的东西立刻就变得完全不同了。”

他们在清楚说明这种连接中的关系时，位于第一层连接的数字有一种幽灵似的东西存在，难以理解。他们相当小心地开始这种思考:如果碗中有7个苹果，确切一点说，“7”是属于谁呢?显然，不属于你拿起来的任何一个苹果（甚至也不属于你最后数到的那个苹果，因为你可以用不同的排列来数数），当然也不属于那个盛放它们的碗，但是那里确实存在7个苹果。很多聪明的人都被这个问题困惑。一些人说7是一组，任何包含7个事物的组都可称为7。如果你吃掉一个苹果，那么7跑到了哪里?这么假定，即使有一个脱离了组，但对于这些组来说他们依然应有7个成员。

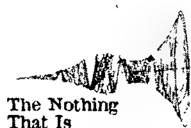


这种情况对于零来说更难理解。零的名字属于一物体，但是零又不属于任何事物。它表示那里的全部物体是什么也没有。基于这层含义，零一定存在于每一个地方:举个例子，可以想像有零个蜂鸟在那个盛放了7个（或者现在是6个）苹果的碗里面。那么，零命名了什么呢?看起来好像是一个更小版本的格特鲁德·斯泰因（Gertrude Stein）的奥克兰，没有任何东西在那里。

“我可以从浩瀚的知识中总结出主要精神，”莎士比亚的作品《亨利四世》中的欧文这么说，“为什么我能做到这些，其他人也能做到这些呢？”霍特斯帕回答道:“但是，当你想要得出主要精神的时候，它们就一定会浮现让你抓到吗?”我们可以通过给数字起名字来领会数字的主要含义，但是它们依然是那么难以捉摸，细小的零让它们跳着舞走开。

跟随着跳舞的步伐，沿着公元前326年亚历山大大帝

的入侵路线，零传入了印度，随后从亚历山大港出发的商业路线使希腊人获得了巴比伦人的礼物——零。假想他们进入了一个神话传说中的国家，在那里时空被惊人地拉长，数字也是惊人的巨大，所有的这些都是很平常的事。足有四码宽的蚂蚁队列川流不息地通过因陀罗（Indra，**印度神话中印度教的主神，司雷雨及战争——译者注**）宫殿的地面。“它们是干什么呢?”他惊讶地问站在他面前的一个10岁朝圣者。这个孩子说:“每一个人都曾经是一个因陀罗，这些因陀罗们统治着无数个宇宙，这些无数的宇宙就像一只只精致的小船，一个挨着一个飘浮在这个无边无际的空间中；每一个因陀罗可以活71世，在婆罗门（Brahma，**婆罗门创世主，主要被想像成包括护持神毗湿奴和湿婆神在内，构成的三位主神的其中一成员，印度教也称作梵天，宇宙最高的永恒实体或精神——译者注**）中的一天一夜是因陀罗中的28个轮回，它是由108年这样的日日夜夜组成的。婆罗门出生前和死后都有另外的一个婆罗门存在，婆罗门是没有终止的。”



但是，对于那些缺乏想像力的人，我们必须放弃来让他们想像这些故事或者他们前辈的生活情景。当一些事情发生的时候，用浪漫诗意的态度来看待这些事件要比普通的思维好。利用这种浪漫的思维，我们可以把那个久远时代的事情连起来成为一个模糊的编年史。《苏雅·斯德班特》（*Sūrya Siddhānta*）的最早版本是印度关于天文学的第一部重要著作，这本书中甚至宣称该书中展示的工作比该书出现的时间早2 163 500年（可是这个错误没有被及时修订，成了无神论者克里斯托弗·马洛（Christopher Marlowe）的借口，他指出这本书中说的年代比亚当的诞生还要早）。

《方广大庄严经》（*Lalitavistara*）是比阿基米德晚了

至少300年的一本书，其中有一个引人入胜的故事，我们是否可以说阿基米德的《沙粒计算表》和他的计算方法影响了这个故事呢？佛陀（Buddha，**佛陀，印度神秘主义者和佛教创始人，他在35岁大彻大悟后开始传教——译者注**）说在他年轻时为了获得戈帕（Gopa）之手，在竞赛中轻易在摔跤、箭术、赛跑、游泳和书写中战胜了对手。接下来是数学测验:他必须为超过一个抠悌（koti，1 000万，也就是10^7）的数字命名等级，每一个等级应该是前一级的100倍。乔达摩（Gautama，释迦牟尼的姓，也就是佛陀Buddha）的回答是:阿与他（ayuta）、尼与他（niyuta）、坎珂日（kaṅkara）、卫卫日（vivara）、阿科币亚（achobya）、卫瓦哈（vivaha）、尤三伽（utsanga）、吧呼拉（bahula）、那嘎巴拉（nagabala）、提提拉麻哈（titilambha）、亚外三阿普日纳普提（vyavaithanaprajnapti也就是10^{31}），接下来是迷人的巨大数字萨马普塔拉麻哈（samaptalambha，10^{37}），感到拗口的卫叁德纳嘎提（visandjnagati，10^{47}）到最后的塔拉克坎纳（tallakchana，$10^{7+46}=10^{53}$）。

但是这毕竟不是最后，正如阿基米德的表达方法，这仅仅是第一级的数。第二级的数是第一级数的最后一个数到$10^{7+2\times46}=10^{99}$之间的数。最终第九级的数使他达到了$10^{7+9\times46}=10^{421}$（这使站在他旁边的穿着长袍戴着饰品的侍臣大吃一惊）。

为了获得额外的成绩，他为一个尧觉纳（yojana，大约三英里）内的所有原子（**这里的原子概念不是现代意义上的原子概念——译者注**）命名：7个最小的原子组成一个很小的尘埃，7个很小的尘埃组成一个小尘埃，7个这样的小尘埃组成一个你可以在阳光下看到的微尘，7个这样的微尘组成一个兔子微粒，7个兔子微粒组成一个小牧羊微粒，7个小牧羊微粒组成一个公牛微粒，7个公

牛微粒组成一个罂粟种子！听起来很熟悉？通过以7为单位最终达到了芥菜种子的大小、大麦种子和手指关节的大小，十二个手指关节是一扎（伸开手掌，拇指尖到中指尖可达到的最大距离），两扎是一个腕尺的长度（自肘至中指尖的距离），四个腕尺的长度是一弓的长度（伸开双臂，两中指尖间的最大距离）；一千个弓的长度是摩揭陀国（**Magadha**，印度东北部的一个古国）一个坷枘（cry，*两个人呼喊可以听到的距离，在摩揭陀有一定的标准——译者注*）的长度，四个这样坷枘的长度就是一个尧觉纳——或者说在这个长度内总共有384 000 × 10^7个原子（他继续这样做下去，表示了地球所有陆地上的原子数量，甚至表示了宇宙中300万个地球中可以含的原子数，由于某种原因，他们的宇宙概念变小了）。


年轻的佛陀正在计算

乔达摩得到的奖赏不仅仅是戈帕之手，而且还有所有学生都梦想的场面：考官自己拜倒在这位年轻人的面前并且宣布："你是著名的数学家，而我不是！"

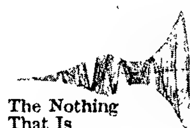
旅行者的故事一定有它的寓意，更好的故事则寓意更广。这个故事的一个寓意就是，以你自己的方式组建一个大得有点荒谬的数字，这不仅仅可以发展你的创造力，而且可以是一个赢得尊敬的传达媒介——以这种方式向世人说："这个时代，地球上有巨人存在。"背诵这些冗长的数字名字（阿与他、尼与他……）使你有一种

巨大的不可见的力量，赋予你讲述神奇魔法的力量。如果这些名字混淆了怎么办？阿与他（ayuta） 和尼与他（niyuta）在这里是10^9和10^{11}，而在其他地方则表示10^4和10^5；如果在其他的计算方法中三个不可见的原子组成一个微尘。8个这样的微尘组成一个罂粟种子（或者如其他学者那样，根本不用罂粟的种子，说是一个虱子的卵。）这又该怎么办呢？兔子微粒、小牧羊微粒、公牛微粒的确切含义又是什么呢？微粒的尺寸相互引起了混乱？巴别塔（tower of Babel，**Babel是《旧约全书》中希腊的一个城市，现在被认为是巴比伦，当建筑者们不能理解彼此之间的语言时，通天塔建筑被迫中断了——译者注**）遭受了同样的痛苦。以各种不同的形式和发音来为数字命名会激起一种魔力，这种魔力是用零排起来的数字所不具有的。

第二个意义存在于佛陀的评论中："除了我和那些像我一样看到了最终结果的人，生活在房间以外的人是不可能知道这个计算的……这是计算的终点。超过它的东西是无法计算的。"换句话说:数字是不可能超过存在的事物的数量的。因此，对于这个故事中的讲述者和听众来说，数字是和物体紧密联系着的。这个故事给我们更需要的启示是那时依然没有一个完整的以位置来表达数字的符号系统（如果有，我们看到的将是数字计算不会结束，因为我们可以通过最后一个数字乘以10来获得更大的数字）。

第三个意义是最重要的，那就是在那个时代，希腊文化对印度文化的影响是显而易见的。在阿基米德的计算系统中出现的罂粟种子和这里的罂粟种子不可能是一个巧合。即使你忽略这一点，又如何解释这两个计算方法的相似呢？事实上，如果你随意看一下印度的占星学、

天文学、或者数学，你都将看到希腊文化的踪迹:与印度教有关的黄道带符号和天文学术语的名字都是来自希腊的借用语（Kendra来源于kentron，用来表示中心，lipta来源于lepton，用来表示分钟）；他们书写分数的方法与希腊人一样特殊——不写分数线。更进一步的证据是结构上的。例如，印度人的行星运动论（大约公元400年）是希腊天体学本轮（epicyclic）的一种。让我们再看一个最明显的错误事实:在印度教早期的天文学中，最长的一天和最短的一天的比值是3:2——这个比值除了在印度最北的纬度地方是正确外，在其他地方是完全错误的，而这个比值对巴比伦来说是正确的，后来被希腊人引用。从《苏雅·斯德班特》中可以看出印度的天文学和数学都与希腊文化或多或少有点儿联系，显然是由太阳神在公元前2 163 102年传授给一个名叫玛雅·阿修罗（Maya Asura）的绅士的。太阳神指导他"进入若玛克人的城市，你自己的住处。在那里，作为一个野蛮人，你将获得重生 （感谢佛陀的咒语），我将传授给你天文科学知识。"若玛克人，也就是罗马人，用来指代罗马帝国或者拜占庭帝国（也就是东罗马帝国）时的希腊人；野蛮人，也是指希腊人，他们"确实是外来人"，正如天文学家瓦日哈米海瑞（Varāhamihira）在公元550年写的那样，"但是，在他们那个时代，天文学处在一个繁盛的时期。"



印度零的形式是一个中空的圆圈，我们知道是来自希腊天文学的草稿，在印度又重新改造了，这一点也不会使你感到吃惊。瓜利尔公国（Gwalior，**昔日印度北部一公国，印度旧都德里南部约250英里——译者注**）的人，想在守护神神庙的旁边建一个花园，那么守护神每天就可以从花园中摘走50朵花——这可是一个美好的想法。他们把这个礼物的细节雕刻在一块石头上，注明的日期

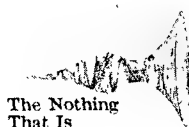
是萨维塔（Samvat）933年（公元876年），上面还标明花园的规划是187×270哈斯塔斯（hastas，长度单位）。270被写做२७०，50被写做५०。这是0这个符号在印度出现的第一次明确的书写形式。刻在铜盘上的文档中有同样大小的0，书写的日期最早是公元6世纪，这种铜盘相当多——当然伪造的也很多，因为11世纪好像是获得这种铜盘的繁盛时代，不管是遗失了很久的还是新发现的，通过一点有创造性的打磨就可以获得那种古旧的效果，所以就出现了赝品。你无法找到那些真正找到这些铜盘的人，你也无须与那些声称他们手中的铜盘记载着希腊人击败了所有入侵者的家伙争论不休。

如果是古印度人而不是古希腊人发明了中空的圆圈来表示零，也许现代的世界会变得更加美好，过去的历史也更加吸引人（虽然，我不能说出为什么将会是这样，因为概念本身比表达符号更重要，正如我们前几章已经看到的，零的概念是古巴比伦人的创造）。这确实打击了我，然而，印度人民的沉重负担也许减弱了他们的创造力，用神话故事来代替一个时间模糊、细节不详的故事的确是一种损失。按现在了解到的知识，好像印度人在9世纪末期之前早已接触到了希腊人用同样的符号表示零的物品，并且已经开始充分利用这个符号，使这个符号在他们中间扎下了根。

如果你愿意闭上眼睛去想像那些模糊数字的明确表达，我们可以把零在印度出现的时间向前推到公元876年以前。这样做又为什么如此费神呢？因为每一个故事就像梦境一般，所闻所见有如神谕天兆，神秘莫测。对这些故事的各种各样的富有想像力的解释层出不穷。也许，这些故事之所以神秘，是因为地中海地区和古印度地区文化上的差异。

距离那个曾经被一些天才建造而现在已无迹可寻的宫殿不远，有一个叫花城（City of Flowers）的地方，大约公元500年，生活着一个天文学家叫做阿利耶波多（Āryabhaṭas）——但是有人说有两个阿利耶波多，这两个人在人们心目中的声望是相反的，或许还有模糊的第三个阿利耶波多存在。作为天文学家，他的名字（或者应该说他们的名字）应该意味着是“博学的人”，在他们中间至少有一个人不是惟利是图的。一些喜欢幻想的人宣称他写了两本关于矛盾陈述的书，其他一些人则宣称他仅仅写了关于矛盾的一个方面——而同时还有人认为他那些幸存下来的文稿是完全不可靠的。

无论当时的情形怎样，阿利耶波多是想找一个简明的方法来记载（而不是用来计算）巨大数字，他成功地找到了一种奇特的表示方法。如果我们到现在还没有位置符号而表达数字，就像8在9 871中代表800因为8所在的位置是百位，我们可能不得不使用他的书写方法来表达9 871：9T8H7Te1，在这里，T代表“千位”，H代表“百位”，Te代表“十位”（事实上，这是我们平常读数的方法）。阿利耶波多为这种表达方法的确立做了一定的工作，只是更加抽象一些。



他决定使用无意义的单词，这些单词的音节代表某位置上的数字，数字由辅音字母来表示，位置由梵文中的9个元音字母来表示。由于前三个元音字母是a、i和u，因此如果你想利用他的表达方法写出386（他在书写的时候，先写6，再写8，然后是3），你会查出梵文中第6个辅音字母是c，然后在其后面加上a（这就表示c处在表示单位的位置上），第8个辅音字母是j，然后在其后面加上i，接下来，第3个辅音字母是g，其后加上u，这样386就表示为：CAJIGU。问题是在这个表达体系中仅仅给出了9

个可能的位置，而作为一个天文学家，他需要很多很多的位置来表示数字。他创造的奇怪的解决方案是把这个系统加倍到18个位置——他把这9个元音每个都写两次:a，a，i，i，u，u。依次类推，他又把辅音字母分成两组：奇数位置的数字用第一组的辅音来表示，偶数位置的数字用第二组的辅音来表示。因此，我们书写386可以用这种方法:CASAGI（c是第一组的第6个辅音字母，其后的a表示奇数位第一位；s实际上是第二组的第8个辅音字母，其后的a表示偶数位第一位；g是第一组的第3个辅音字母，其后的i表示奇数位第二位）。下次，当你去思考不同的表示方法时，请记住阿利耶波多。

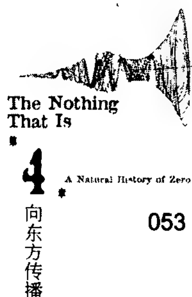


很显然在这个表达体系中并没有零（但是非常有趣，在解释这个问题时，阿利耶波多说："9个元音字母被用在了18个位置上。"），他使用"kha"来表示没有数字的空位。这个kha后来在印度成为表达零的最常见的单词。在这里它就好像是思维发展的一个慢镜头:从一个命名的空位符号到一个纯粹的位置符号的转变，从一个数字可以寄宿的空位到"空的数字"（空的数字是这样一个数字，它把其他数字轻轻向前推到它们自己的位置上）的转变。

谁能让我们清楚这个朦胧的概念呢？这个朦胧概念本身又是什么呢？它的主要元素是单词，这些单词含义的相互碰撞产生思想的火花：因为一旦有一个像"kha"的名字描述了零的某些方面，其他的将变得简洁起来，直到零是什么确实存在于零的含义中。比阿利耶波多晚50年，在乌贾因有一个叫瓦日哈米海瑞（我们已经简要提到过他）的人，他高度评价了希腊的天文学成就。他当然也没有表示零的符号，但他使用了很多名字来表达零：像阿利耶波多的"kha"；空间的单词：像天空

(ambara, sky), 空气 (ākāśa, atmosphere), 空的 (śūnya, empty) 等等, 这些都很快成为零的常用名字。这些名字是从希腊早期的文章中 (至少有一些文章一直受到他的赞扬) 获得的吗?

同样是在乌贾因, 大约100年后, 出现了婆罗摩笈多 (Brahmagupta), 他是阿利耶波多的一个严厉的批评者 (相反, 作为阿利耶波多的热情支持者会期望少一些这样的人物)。他依然没有零的符号, 但是像阿利耶波多一样, 他把零叫做"kha", 时常他也会像瓦日哈米海瑞一样会把零叫做"空气"(ākāśa) 或"空的"(śūnya)。"空的"(empty) 是阿利耶波多位置含义最可接受的意义吗? 不管它的意思是什么, 作为一个实实在在存在的形容词, 我们应该注意这些方面:它是如何使零的含义更接近于数字的含义, 它连起了形容词的零和名词零之间的差异, 让我们注意它是如何与过去曾经出现并且将来也要出现的空心圆形的零变得一致的。



把时间再向前推进200年, 也就是公元830年, 在迈索尔南边700英里有一个叫摩诃毗罗 (Mahāvīrā) 的人 (他的宗教信仰从印度教转向了耆那教), 在他的著作《计算方法纲要》中, 他发展了婆罗摩笈多的思想, 并纠正了其中的错误。他广泛和零打交道, 但他也没有零的专用符号—— 他不把零叫做"空的", 而是维持使用"kha"。也许这与他热心修订婆罗摩笈多的著作有关。为什么他抛弃了瓦日哈米海瑞零的数字含义的同义词 (这些含义来源于天空和空间的共性和特性, 诸如深、没有止境等等, 总共大概有12个相近的词来形容天空) 呢?

他是为了避免在不同的上下文中把零看做不同的意义吗? 这使我想起语言学家的一个观点:在刚刚开始的时

候，我们理解和命名那些将要认识的单词时，总是尽可能使其与以往的单词有明显的差异——这也就是我们使用的古老动词为何如此不规则的原因，例如："他们是"（they are）和"她是"（she is）与"我是"（I am）就有非常大的差别。或者印度人也像希腊人一样倾向于把智慧、知识和记忆相提并论，以至于他们把像数学这类重要的事情写成便于记忆的诗歌形式。这就意味着必须有足够可以选择的单词来满足不同韵律需求（摩诃毗罗为每一个数字也准备了很多单词）。当然这种从形态上选取出来的发音和这种发音存储的便于记忆的数字信息加速了数学抽象的发展。

当然，这些不能解释为什么意义相同的多个单词具有相同的韵律节奏——但是诗歌的形式可能已激发了诗人表达的灵感。我不知道为何一个读者也能随口说出这样的句子："……融入长空，与之一体。"

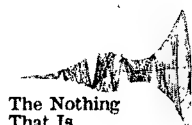
或者摩诃毗罗一直想用比喻把他的数学带到其他领域去？我们不得不考虑在他的一本书的致谢部分的话："愿基纳斯（Jinas）的最高统治者的基业长青，他破除了单一的结论，光大了或然主义（syādvāda）的逻辑。"英文翻译者是这么解释或然主义的逻辑的：它是关于世界的面貌是不是真实的争论，或者世界是真实又不真实的——或者是不可描述的，或者是真实的但是不可描述的，或者是不可理解也不可描述的，或者最终是，世界是真实存在的又不是真实存在的并不可描述的。

这些组合中的哪一个最符合零的含义呢？在那个时代，哪一个最好描述了它的地位呢？零的名字越多，你可以想像，它正确表达数字的可能性就越小——依然是无层次的语言而不是严谨的数学。正如一些人宣称的那样，假如很久以来零就有一个表达它的符号，事情会怎

么样呢？他们向来自幼发拉底河的证据求助。公元662年，叙利亚的主教塞维鲁斯·斯波哈特（Severus Sebokht）这样宣称：希腊人在科学上不是垄断者，相反他们仅仅是巴比伦帝国中迦勒底（Chaldeans）人的学生；不是他们，而是叙利亚人发明了天文学；除此以外，他还发现印度人比希腊人更有创造性，印度人使用的计算方法也比描述方法更先进。他接着说："我仅仅想说，这种计算是通过9个符号完成的。"9个符号，为什么不是10个符号？事实上，这个证词难道不是在证明印度人仍然在等待零的符号获得新生？难道不是在证明零仅仅是个存在于数字之间却不是数字的单词？

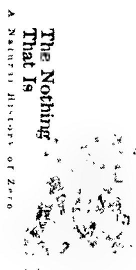
事情又一次是这样，当有一个符号来表示零的时候，就有更多的观念来理解它，这些观念是直接来自巴比伦人呢，还是通过希腊人传过来的？出现在印度的这种不确定性使这个符号有什么样的概念呢？这种观念是一个数字的缺乏引起的，还是为了这个缺乏而找了一个数字呢？它是一个表示"空的"标记，还是空标记？第一个含义使它远离数字，第二个含义把它放在了和数字同等的位置。

所有的条件已经具备，到了孕育零的时刻了。100年前，人们提到这样的事情时说："印度的哲学和宗教的结合对于发明零是再合适不过了。"他们发明一个符号来表示零就好像是想要达到涅槃的动力一样，人人都有。在我们祖父母辈，有一本权威的书，是奥斯瓦尔德·斯宾格勒写的《西方的没落》。在这本书中他写道：零是完美抽象力的一个精确创造，印度人把零作为一个计数的位置符号，它表示一无所有，在表示存在这个要点时它既不多也不少。他继续说，希腊人的精神充满了享乐主义，因此永远也不可能产生这种重要的东西，婆罗门的精神



让那些数字可以自己不言而喻地出现。

我们抛弃斯宾格勒的权威性论断，他所做论断的基础都是来源于错误的渠道，这也许是我们抛弃他的论断的最好理由；人种观念、宿命、浮士德的灵魂这些词语在1918年曾风行一时，20年后，纳粹恶魔又重新搬出了这些言论。我们抛弃了这些言论，因为在这个小心谨慎的年代，我们不相信这些笼统概括的东西，宁愿接受统一所带来的小混乱，而不是因为草率行事得出了错误结论。我们使自己理想化，成为一个有严谨头脑的人。现在没有一个人在研究了印度文化以后还跟随斯宾格勒说出这样的话："只有在印度的这种宗教环境下才能创造出作为真实数字的零。"



为了代替起源于印度的中空的零来自实在事物的假设，一些学者（为了捍卫零起源于印度这个说法）寻找到了一个很吸引人的证据，这个证据是基于婆罗门表达10的符号——这个符号是 ∝，也许是 α［在浦那（Poona，印度西部城市）不远的一个小山的洞穴中，残留着公元前2世纪时期模糊的题字。］，或者是 α 和 ∝，这些符号可能来自公元1世纪或2世纪纳西克的神圣洞穴。

那时有人想把10作为计算的第二级数的第一个（继续上面的讨论），该怎么办呢？这就要求第一级数的第一个不能是1（1应该和11相对应），因此就用了10的相似符号，把符号 ∝ 修剪为 O 来作为第一级数的第一个。为了给这个可疑的证据提供支持，他们指出早期欧洲人的算术学中经常把0写在9的后面，这是阿拉伯人的书写模式。这种推测似乎要求婆罗门符号系统中的1看起来像＜、≺或者＝，而事实上，1同你期望的一样，是｜或者_。非常不幸的是，在这个模糊的题词中，用0来表示20，而在

克什米尔有一个符号系统中，用0来表示1，这些都是靠不住的古代遗迹；而在同时期印度的其他地方，10以不同的面目（ ⁊， ϒ， δ， ⊥和ㅒ ）出现。

甚至，如果我们接受0和∝的联系，希腊人的先例就要突然出现了。你在第2章的时候已经看到，在雅典的数字系统中，首字母阿尔法（α）被用来代替1。也许作为一个可以看到的双关语，1这个数字可能和一个想像中的石头结合在一起，正如你在第2章中所看到的，希腊人不是用实心的点来代表他们形象化的数字，而是用他们字母表中的字母来表示数字；举个例子，毕达哥拉斯学派把10用首字母表示出来，如图：

α

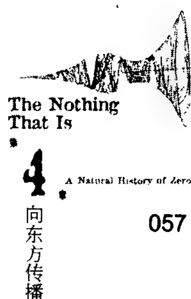
α　α

α　α　α

α　α　α　α

这个法宝在它传到印度的时候能被压缩为一个单个的符号α吗？

数学史家卡尔·朗·科恩伯格（Karl Lang-Kirnberg）在这方面做了大量的工作，他把发明零的桂冠从印度人、希腊人甚至巴比伦人那里拿走，给了公元前3000年的苏美尔人。你还记得，在他们开始用铁笔尖写字以前，苏美尔人用芦苇在湿黏土上做记号——他们表示10的符号是用芦苇直立着写出：O。这个符号使放在它左边的数字增大10倍，这时它就变成代表0了。他肯定地说：“如果本身没有代表10的含义，O不能使一个数字乘以10。”但是零的这个来源在过去的几千年一直藏在了哪里呢？又为什么隐藏了几千年呢？为什么它能选择它该出现的地点和时间出现呢？在这一点上，朗·科恩伯格小心谨慎地保持着沉默。



你是否开始感觉到世界上每一个小社会都可能是零的发源地？你是否开始小心地认为，在梵文中表示省略的单词和音节的符号理所当然的是一个小的°？在鞑靼人的文章中多余的部分用椭圆圈掉，这也是零的起源吗？或者，公元1150年，印度的一个数学家为了区别两个数字中被减掉的一个数，在它的上面画一个小圆来做标记，这也能称为零的起源吗？这个圆圈被扩展并用到了其他的各个地方？

你是否已经得出这样的结论，原本我们就没有很多可以很容易地书写和发音的符号，但是有很多伟大的想法和工作需要符号，我们应该能够很幸运地通过上下文来帮助我们计数和运算，这样我们应该能分辨出来这个符号到底是该读做度数、70米瑞亚德、减去的数、奥卜尔、多余的单词、省略的单词、小石块或者拿走小石块后、70或者1或者20或者10或者根本什么也没有。



从历史现象本身出发，关于零的起源的推测大量涌现。我们试图从现在保留极少的古老档案中重新找到那时发生的事情。当时的线索是很少的，但是我们的思维有创造性，我们抓住任何一个可以照亮黑暗的火花，借以创造性地想像当时发生的事情。你希望下一个证据或者推测不再是增加关于零的起源的那个列表的长度，而是开始去寻找它们之间的联系。再次听一下塞佛留斯·斯堡胡特主教的话，你的愿望就将实现。

他说，印度人有计算的方法，这种方法超过了单纯的描述。你是否想知道为什么有那么多符号和单词混杂在一起，同时还有那么多的同义词，其实我也很想知道。答案是他们并不用这些单词计算，而是像希腊人一样使用一个计算板来计算，所有的这些文字系统仅仅是为了保存结果。关于他们的计算板，我们知道些什么？一些

令人惊奇的东西是：在计算板上有一薄层细沙覆盖着！事实上，常说的“更高一点的计算”是“沙粒的工作”，铺上一层沙粒，看起来更高一点。因此，我们寻找的支持我们关于0的猜想的证据，是从印度的灰尘或者沙粒上拿走圆形筹码后留下的印痕。

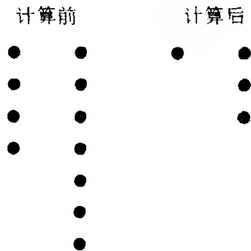
第5章 灰尘

The Nothing That Is

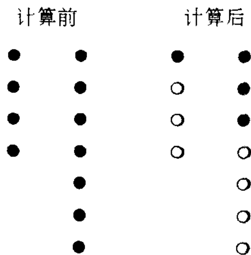
A Natural History of Zero



但是为什么印度人要在他们的计算板上撒上沙粒呢？我认为似乎最合理的解释是用沙粒作为一个存储器：在你计算结束以后依然可以看到你计算时用的数字痕迹，这样你还可以核对结果。举个例子，如果没有沙粒，在一个计算板上计算47减去34看起来就是这样：

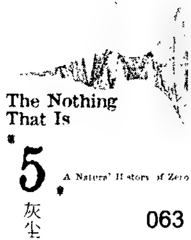


想改正一个匆忙造成的错误，你几乎没有任何办法。但是如果下面有沙粒，你将会看到这样的结果：

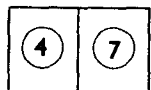


计算板的起源可能是在沙滩上的垄沟里面，也许只是偶尔这样，当计算板被固定在木头或者岩石中时，沙粒也相应保留下来了。

如果事情真的是这样，我们还可以再做一些推测。为了计算，垄沟被手或者小鹅卵石抹来抹去，很快就变得模糊不清了，这可能是一个足够的理由来使人们思考一种方法，在计算的时候你书写一个可以擦掉的数字而不打乱这一列，这样就有了一个通向位置符号的道路。因为我们回到古代是想知道塞壬唱的是什么歌，让我们再加上一些吉尔伯特的尖体作为证据也没有什么不可。



为计算板准备的筹码是用牛角制作的，是修道士吉尔伯特在大约公元967年设计发明的——在他成为西尔维斯特二世主教以前。他们的名字是拉丁文的顶点（apex）的意思，好像这些筹码是圆锥体的尖端——也许是来自早期堆砌起来的筹码的形状的变异。它们特别的地方是每一个尖体上面都刻有一个不同的数字，因此当你表达上面的47时，你仅仅需要按下

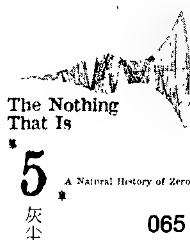


由于他用的数字是西方阿拉伯数字，在这个数字系统中，2、3和7被写成这样 ∾ ， ω 和 ✓ ，看到我们的数字2、3和7和旋转后的吉尔伯特尖体很相似，这是令人高兴的事：∾ 变成 2 ， ω 变成 3 ， ✓ 变成 7 。他带给了我们这样推测的灵感，这些尖体是使用单个筹码表示数字和书写数字的中间过渡阶段。当然，我们不得不说，吉尔伯特仅仅是重新发现了这种方法，因为这种做法在他很久以前就已经出现过。

这个推测的最后一个相应结果就是：吉尔伯特——或者他的弟子们，有一个表示零符号的尖体，写得像这个样子：⊗。他说，它的名字是桃花心木（sipos）。也许这是希腊单词中表示鹅卵石的一个错误单词，应该是 ψήφος ，psephos？如果是这样，又一次展示了这些筹码表示位置和零时的相近关系和混乱性，筹码的缺少就是表示零——就像阿利耶波多的“kha”。这也可以解释为什么吉尔伯特受到和邪恶精神交流的指控，本来涉及数学已经很糟糕了，他还让虚无的状态存在于那个文明所不允许的领域。

撒满沙粒的印度计算板的影响在忽明忽暗中飞驰。西塞罗（Cicero）说到的博学的灰尘是指那些数学家在

它上面画图表的沙粒——但是那并没使它们的表面成为一个计算板；因此当他轻蔑地说："你从来没有了解过数学。"（numquam eruditum illum pulverem attigistis，字面意思是，从来没有接触过博学的灰尘。）他这么说很可能是因为你不了解几何数字或者那些在第2章出现的三角形或多边形数字。雷米吉尔斯（Remigius）在公元900年这样描述计算板，计算板上面铺上了绿色和蓝色的沙粒（让人听起来很想拥有一个这样的计算板），但是，由于他说上面的数字是用一个带尖的棍子画上去的，这样的计算板应该还属于传统的计算板。贺拉斯（Horace，**罗马人，公元前65~公元前8年——译者注**）曾经使用蜡做的计算板挂在他的手臂上给村里面的孩子大声地上课。但是，罗马计算板上用的计算筹码（或者说算珠，小鹅卵石）是整齐地串成一串一串的，也被撒上沙粒。希腊人称计算板为"算盘"、"abacus"，ἄβαξ（abax），这可能不是来自"无腿的工作台（legless table）"而是来自闪米特语的"灰尘"。



希腊人用中空的圆来表示零，最大的可能是来自覆盖了沙粒的计算板上拿走计算用的小石头后留下的痕迹。如果有单词来表达"可能"（possible）和"很可能"（probable）之间的微小差别，我们可选的一个单词应该是这些其中的一个：原想（would）、应该（should）、可能（could）。如果没有这些单词，就让我们永远也不要去推测古人的事情，以免发现自己有教古人该怎么说话的嫌疑，就像一些匿名的学者在公元11世纪对波爱修［Boethius，**罗马哲学家，被误判叛国罪处死。在狱中写成以柏拉图思想为理论依据的名著《哲学的慰藉》**（*The Consolation of Philosophy*）**——译者注**］做的一样。为什么不提到公元5世纪罗马人关于几何学的一本大百科全

书似的专著呢，作者自己一定做了很深的思考，包括数字0到9通过阿拉伯人很快传到了印度。如果我们同意这样一个陈述，事实上计算板是毕达哥拉斯的工作台，用毕达哥拉斯来修饰——以至于后来的读者将会把深奥的传统和神秘的流言与那个在狱中写下了《哲学的慰藉》的权威人士联系在一块，然后就可以推论出来，毕达哥拉斯是从东方漫游后回希腊的时候带回了计算板。到此为止，我们希望发生的事情已经证明为真实发生了的事情的一部分。

我们弄清楚了上面的灰尘，却使另外的灰尘显露出来。西班牙摩尔文化中（公元950年）有一种数字，阿拉伯人称它们为“灰尘数字”（带点的数字）。这些数字是什么呢？它们起源于哪里呢？为什么会有这么奇特的名字？它们是1到9的数字，没有0。人们认为它们的名字来自印度的满是灰尘的计算板，被一些商人而不是学者在旅行返回时带到了那里。和我们的故事有关的（好像半路突然出现了一个神秘的不可信的新鲜事物）是这些灰尘数字周围点有某些奇特的灰尘点——一串圆点表示它的数值大小。如果数字上面没有圆点就表示这个数字代表个位，数字上面1个点代表10位，2个点代表百位，以此类推。因此（用我们现在的数字系统表达这种方法，而不用他们的数字系统来表达），$\dddot{8}\dot{3}$ 就表示8 030，而 $\dddot{8}3$ 就表示8 003。

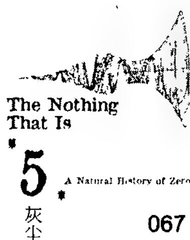
这些实心的圆点几乎扮演了零作为位置符号的功能：这个实心圆点是中空圆圈的压缩吗？或者，这个实心圆点是零的一个完整起源吗？这个“家族财富”就是我们一直寻找的零的真正起源吗？这个实心圆点就是那个“懒汉叔叔”，突然出来宣称自己对“财富”拥有所有权？因为，如果我们在大脑中想像这些圆点，我们将会发现这些圆点无处不在：扮演零的角色，或者作为无效



的、丢失的、缺少的、模糊的和不可见的标记。

研究历史的一个似是而非的方法就是我们通过看现在或者将来的东西来了解过去的东西：根据现在散落的结果来推测发生这样结果的原因，看到子孙后代的相似性，我们就应该知道祖先应该有的特点。因此，让我们跟随这些从一系列语言体系中发现的实心圆点，穿越巨大的时空，来看看这些实心圆点是否可以带领我们进入这个问题的核心部分。

当发音从希腊语、拉丁语、梵语和其他语言中分离出来的时候，至少在公元前1世纪的时候，它们已经变成了可区别的符号了：鼻音、Gs和Hs失去了它们的共同特性，不再发音，它们大部分以圆点、某种形式的笔划或者曲线的形式出现在其他的字母上——某个语言学家说，字母零表示什么也没有，因此能够很好地作为一个标记来修饰字母使发音更准确。零的这种听力上的角色转换成了数字中的数值零了吗？在希伯来语中，当元音字母出现的时候，它们往往就是扮演这种角色，像实心圆点一样被标记在其他字母的上边或者下边，其作用可以帮助初学者或者防止模棱两可的情况出现。（或者，当这些元音字母缺省，不再被标在字母的上边或者下边，那也是一种解释形式，这时的发音明显不同，表达了不同的意思。）在这种"点彩派画家"氛围下，前辈们带"灰尘"的数字出现了。



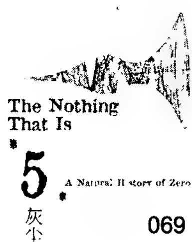
在这些修饰性符号中，实心圆点是用的比较少的并带有一点神秘色彩的，在《圣经·旧约》的前五卷和希伯来圣经第二部中总共只使用了15次，大部分是在单词或者字母的上面，偶尔出现在下面。进一步的证据是进入公元2世纪后，但是它们表达的意义充满了学术上的争论。这些修饰性符号破坏单词的意义了吗？评论家拉什

说了这样一个例子，这些圆点可能倾向于表示那些没有写完全的单词。要么给它赋值为零，要么表示把它删除掉。另外一类点可能表示的是生和死不同，这是因为它是一个写在安息日（Sabbath，**犹太教徒和一些基督教派认为星期六为休息和拜神的日子，即安息日——译者注**）大写字母上的点。但是，如果我们使用一个单一的字母来缩略一个单词，事情会怎么样？观点有分歧，这样做会不会导致犯错误呢？如果这样做，那我们如何知道一个单一的字母表示缩略单词的意思呢？拉什做了这样的评论，一个圆点可能用来区分一个普通的字母和单词的缩略字母，这是一个简单可行的方法，使用起来不太费劲。

但我们再来看印度那个时期文章的时候，我们发现一个小点是代表一个誓言——完成一项艰巨任务的誓言，但是有时在题词或者手稿中也代表一个空缺［想一下，如果我们留给读者三个小点（英语中的省略号）来代表我们完整的思想，那我们差不多是表达这样一个意思：用单词来表达这个思想实在太难了，但是你知道我想要表达的是什么］。在梵文中，当零（这里应该叫做kha）代表鼻音*n*时，它常常传递着神秘的信息，表示可以和湿婆（Śiva，**印度三大神中司破坏之神——译者注**）取得联系。

给了表示零的点在语音上、句法上和语义上的意义，我们是否可以从阿拉伯的灰尘数字中找到一些线索，这些线索有关于印度数学上的零（实心圆点）？更详尽的这方面的知识在《列表的书》（*The Book of Lists*，*Kitāb al-Fihrist*）中可以看到，这本书是公元987年艾本·阿比亚·丘布拉·南蒂姆（Ibn Abī Ya'qūb al-Nadīm）编纂的。他独自一人描述说，印度人也使用相同的方法来表示数字，只是他们把点画在下面（一个点表示10，依次类推），

这些把点画在下面的数字是早于和不同于阿拉伯的数字的。如果这些点（写在上面或者下面的）早于中空的圆圈，他们可能无法解释，为什么它的书写大小总是其他数字的一半。这个细微的区别是否也证明零的符号（像一个点）同字母和数字都不是一个级别的？它仅仅担当起了一个修饰者和分隔者的角色，就像我们现在所用的冒号、逗号和分号的作用。想果你想对于印度人怎样使用圆点和中空的圆圈有更多的了解，你可以去看卜哈斯卡瑞（Bhāskara）的关于圆圈的使用说明。在1150年，他把一个小圆圈放在一个数字的上面，表示这个数字将要被减去：在比他早5个世纪的卜日马古普塔的书中，这个小圆圈是一个小圆点。当然对于卜哈斯卡瑞来说，他既使用小圆圈又使用小圆点，这两个符号能和谐地在一起使用。正如他的一个评论家所写的那样，“当9个数字中的任何一个数字都不表示位置的时候，位置就用一个空白来代替，为了避免错误，这个空白就用一个小圆点或者小圆圈来标明。”



然而，重要的问题是：把圆点作为零的历史有多久？在你试图回答这个问题以前，这个问题看起来似乎很简单，但事实并非如此。参考阿拉伯文献来解决这个印度问题总是被这样一个事实困挠着，那就是在阿拉伯文化中零一直被写做一个圆点，因为阿拉伯人用中空的圆圈表示5（在他们的数字列表中没有符号“0”）。在1881年印度西北边境线上的巴卡沙里，一个农民挖出了很多白桦树皮，在这些树皮上面写满了算术符号，遗憾的是其中很多被烧毁了。在这些树皮上用圆点表示零的地方很多——这里我们也称做空白，但是它们属于哪个年代呢？人们曾经认为它的年代应该是公元3世纪，甚至有可能是公元2世纪，但是这些推论是基于刻上去的算术

符号比白桦树皮毁蚀的速度快得多，当前比较流行的观点是刻在这些白桦树皮中的符号零是出现在公元7世纪。

在大约公元620年的一本著名的书中（*Vāsavadattā of Subandhu*），你可能会找到更好的证据和更引人入胜的想像。在这本书中，作者这样说道：天空中圆点似的星星就像是一个个的零，因为这些闪亮的星星代表着一个无效的生命轮回（流星代表着成功的生命轮回），上帝在蔚蓝的天空中用月亮的光线做标记来数这些星星的总数。把时间回推一个世纪，你是否还记得瓦日哈米海瑞和他表示零的同义词？在他的同义词中，其实还有一个词叫做“点”（bindu，虽然它只有名字，没有符号）——这看起来好像是我们所能确定的最早时间了。在这以前几乎没有具有历史意义的事件出现，在我们看来只是混沌的神秘状态。

公元270年，一个名叫斯非吉瓦加（Sphujidhvaja）的人写了一篇文章《希腊人的占星术》（Yavanajātaka, The Horoscopy of the Greeks），这本书是翻译公元150年的一篇梵文散文。在这之后希腊人的原创几乎是从亚历山大大帝时才开始。在1978年被发现的这本书的一段中，我们发现60被提到了两次：第一次是‘ṣaṭ binduyutāni’，第二次是‘ṣaṭ khāyutani’，这两个单词表示的意思也就是“6和0”，即60。你可以看到，表示零的单词，第一次使用的是“bindu”（点），第二次使用的是“kha”。公元150年是希腊天文学家托勒密的《天文学大成》问世的时间。同时梭伦（Solon）和波利比奥斯（Polybius，古希腊历史学家）也曾这么说过，出现在黏土上的记载文字——一个小球或者珠子，在不同的位置代表不同的值。还有什么更好的证据来证明表示中空圆圈的“kha”和表示实心圆点的“bindu”是从希腊传到印度的吗？

第6章 表示未知数

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



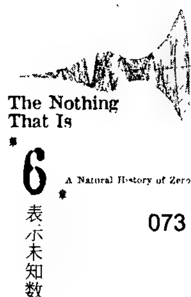
现在看起来，所有的东西都很清楚，似乎想当然的是这个样子……其实，当你想想，我们是在用一些细线似的证据来架起一座证明一个庞大问题的桥梁，这就好像使用一根钢丝绳来拉住尼亚加拉瀑布不让它往下流，然后把这根钢丝绳再用一根细线连接到一个风筝尾部上，所以，我们的证明是那么的不牢靠。我们能否架起一条牢固巨大的快车道呢？斯非吉瓦加的那篇文章一经发现，那个句子中表示零的单词就成了问题的核心。一个学者这样认为，表示圆圈的“**kha**”和表示圆点的“**bindu**”的出现是相互作用的结果，一个的出现相应地就会引起另一个的出现。

达芬奇在老年的时候，一遍又一遍地在帆布上潦草书写：“告诉我是不是任何东西都是完美的？”我们也要像他那样在帆布上乱写吗？我们应该把问题缩减到简单的几个点吗？不，再一次被否定。“**bindu**”毕竟意味着一种突破，也意味着“发展过程中的一次突变，就像滴入水中的一滴油滴，慢慢地扩大它的地盘”。这样我们对这件事的理解就有了这样的发展：这些能告诉我们一些问题的东西——不管是否是印度人首先提出了用圆圈或者圆点来表示零，更重要的问题是，当他们拥有零的时候，他们是如何思考零的意义的。非常明显，对于他们来说，这个圆点不仅仅用来表示零，还用来表示未知的东西，我们现在用x来表示未知的东西。因此在巴卡沙里的手稿中，一个问题我们可以这样理解：“当27/8和32相乘时结果是多少，”或者表示为：

$$x=\frac{27}{8}\cdot 32$$

（因此，x=108），他们在书写的时候就是这样的方式了：

$$\begin{matrix}\bullet & 3 & 3 & 3^{32} \\ 1 & 2 & 2 & 2\end{matrix}=108$$



(在点下面的1表示一个未知的数)。

这可能并没有使你感觉到这个表示未知的符号有什么用，因为这个问题太简单了：这个问题也就是 $\frac{27}{8}\cdot 32$ 是多少呢？但是在巴卡沙里手稿中的另外一个数学问题就会使你重新进入学生时代那熟悉的困境当中：

> B是A的2倍，C是B的3倍，D是C的4倍。这四个数在一起是132。那么A 是多少呢？

这个手稿很聪明地解决了这个问题：

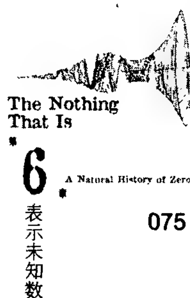
> 用1来表示这个未知的数。那么就有A=1，B=2，C=6和D=24。它们在一起的和是33。132被33除，答案是4，这也就是A的实际的值。

(我们现在的解法：用x代表A，那么B是2x，C是6x和D是24x。因此x+2x+6x+24x=132，或者33x=132。因此 $x=\frac{132}{33}=4$。)

我们不清楚使用圆点来表示未知的数有多早。卜日马古普塔在公元630年称它的变量为“yāvat tāvat”，缩写为“ya”(当他需要使用更多的变量时，就像我们用x、y和z来表示多个变量一样，他使用颜色来表示多个变量：黑（black)，蓝（blue)，黄（yellow)，白（white)，红（red)，缩写为：ca，ni，pi，pa，lo)。但是当一个印度数学家（在一个传奇故事中）认为能毫无问题地把“没有东西”（nothing）和“某物”（something）都叫做“空的”（śūnya）的时候，一个时代来临了，这个用法也固定了下来。这是怎么回事呢？美国的逻辑学家威拉德·奥曼·奎恩（Willard van Orman Quine）指出“没有东西”和“某物”都是虚指的存在，从语法上看是一个名词，而从逻辑上看不是名词。他这样写道，名词命名事物，

举个例子来说，一个东西不可能既是红色又不是红色。但是，如果我们说“某物是红色的”和“某物不是红色的”，这又都是正确的（奎恩讲了这样一个故事，当一个钢琴家为自己演奏的莫扎特作品敲错了一个音符而道歉的时候，奎恩却认为他仅仅是演奏了一个其他更好的作品）。

什么东西可以在这一秒的时候是“没有东西”而下一秒的时候就是“某物”，又在代替任何事物的时候出现？这听起来好像是在一个晚会上，为了减轻某一个人的忧虑说出来的一个答案具有双关意义的密语，但是，事实上这是令印度人感到迷惑的“空的”（śūnya）。这个问题的答案是我们一直在用“空白”（void）或者“空的”（empty）来错误的翻译“śūnya”这个词。在印度教徒的眼中没有绝对的空白或者虚无状态。和我们现在的物质守恒定律所认为的一样，物质不能消失，仅仅能改变它们存在的状态和性质：物质充满着整个宇宙，相对于“绝对元素”，它既不能增加也不能减少，“绝对元素”和佛教中的“绝对存在”扮演着同样的角色。



或者这么理解：它好像是藏在外表后面，是一种东西，它没有特性，但是却呈现出和它的环境相似的性质，可以让我们来解释它，就好像是龙涎香（**一种脂肪物质，用以制香料，加入香水中以减缓挥发速度——译者注**）保留着香水的气味，给我们散发出香水味。“śūnya”不是十分的空白，作为一个接纳性很强的东西，就像是一个中空的子宫，准备好了去膨胀。它的伙伴“kha”来自动词“去挖”（to dig），因此这个词含有“洞”的含义：一些东西将用来填满它。

在计算板上零是这样的：存在着一列，但是这一列上没有一个计算筹码。这时零作为一个位置占有者的符

号，本身不代表任何大小的数值，但是它的存在却给其他的数字赋了数值。同样的性质是变量也具有的：在不同的方程式中就可以代表不同的数值。在不同的地方，背景的改变就会使筹码的值改变，它周围数字个数的多少会使它隐含的值表现出来。因此有人在布瑞斯（Bris）的典礼上为以利亚（Elijah，**旧约全书中记载的最伟大的一位先知，他寻求废除偶像崇拜并重建公平。据圣经所述，他并没有死而是乘着燃烧的马车上了天——译者注**）准备了一个空位。当他再来的时候，他可能以一个乞丐的身份来，也可能来宣布世界末日。就像挤牛奶女工哼唱的歌曲中提到的克利须那（Krishna，**黑天毗湿奴的第八个和主要的化身，经常被描绘成一个吹笛的英俊年轻人——译者注**），他可能根本就不会来。歌曲中这样唱道："我对他说，来吧，来吧，来吧，来吧，来吧，来吧。他忘了来了。"



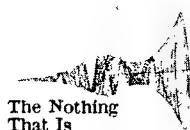
"śūnya"的含义和摩诃毗罗的一些同义词的逻辑很和谐，它着重表达一些不确定的概念，可以帮助我们理解卜哈斯卡瑞在一本数学书开头写的一些话。他说："我崇敬那些看不见的原始物质……因为它是可见物质的惟一组成元素……所知道的物质质量……是建立在未知物质质量之上的，并且……将要解决的问题似乎不能被任何人理解……"

难道我们的那些圆点到了印度？零和变量不是真的诞生在这里，而是śūnya的孪生子孙或者是印度人对"空的"奇特理解方式才真正地促成了它们的诞生？也许最终斯宾格勒是对的，只有印度文化才适合产生这些符号。

但是像一个沙漏，漏斗再次打开时，圆点漏到了古希腊。用字母表示数字的问题是你需要使用一些特殊的标记把表示数字的字母和单词区别开来。你在第2章看到

的希腊人画在一组数字上面的线条经常被分割成短的线段，甚至最后变成了一个小圆圈，然后画在各个字母上面：因此，$\bar{X}$或$\breve{X}$ 表示600。一些人使用一个或多个圆点写在字母前面和后面来代替：用·X·来表示600；:τιη:或者⁝τιη⁝来表示318。想把一个数字增大1 000倍，他们使用的标准方法就是在字母的左下方书写一个小的标记，例如，β表示2，但是，͵β就表示2 000（偶尔，这些符号也写在字母的上边：Ȁ和Å分别都表示1 000）。他们的习惯是不给这些标记定界限。分数有时在表示的时候是把标记放在字母的右上角，因此，γ表示3，但是 γ′（或者偶尔是 γ^{+}，甚至是 γ″）表示 $\frac{1}{3}$。阿基米德书写 $\frac{10}{71}$ 的方法是ῑοα′（ι 表示分子10；ο表示70，α表示1，因此，οα表示71，那个右上角的小标记表明这个数字在分母上）。你会对此感到十分惊讶，阿基米德竟然使用这种方法进行他所涉及到的所有计算。

公元二世纪和三世纪的亚历山大时期有三个伟大的数学家，他们是希罗（**Heron**），派帕斯（**Pappus**）和黛尔芬特斯（**Diophantus**），他们的工作被证明对印度的文化有很大的影响，他们使用的符号甚至也很接近我们现在用的符号。黛尔芬特斯是用符号$\overset{\circ}{M}$放在他的米瑞亚德和单位之间来分开它们。但是他和派帕斯时常仅仅放一个点在那里来代替$\overset{\circ}{M}$。举一个例子，β•οδ就表示20 074。事实上，这个点使它左边的字母表示的数字扩大到了10 000倍，这就像是零的一个堂兄弟。希罗是放两个点在表示数字的字母上边来使它的数值扩大到10 000倍：α表示1，α̈ 就表示10 000。在另外的一个老希腊符号系统中，这一系列的符号被保留了下来，每一个新增加的点都使原来的数值扩大到原来的100倍。希伯来人的习惯是放两个点在一个表示数字的字母上面来使他的值扩大到



原来的1 000倍，通过写在字母右上边的小重音符号来区别表示数字的字母和单词，他们的传统是来自希腊人，还是希腊人的传统来自希伯来人？

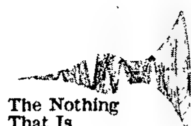
希腊人在很早以前就开始使用圆点来表达数值，我们也已经在随后的数字表达系统中发现了这点。我们已经讨论过印度的数学家使用过同样的符号来表达零和未知数，因为印度数学家把每一个零都看做是一个未填满的容器，可以任意地再填充其他的东西。如果我想把这个讨论的结果也用到希腊人身上，我就不仅应该证明他们使用点来表示零，而且还要证明他们也使用点来表示未知数，进一步还要证明他们为什么要使用同样符号表示未知数和零。事实上，未知数——我们该如何说呢？我们是该说它是被发现的还是该说他是被发明的呢？回到遥远的巴比伦，大约在柏拉图时代，当时有一个叫做塞麦瑞达斯（Thymaridas）的人，他是毕达哥拉斯学派的人，他知道了如何解决含有几个未知数的方程组的问题。这个解题方法被称为他的杰作。谁能说明白为什么直到亚历山大时代我们都没有再听到过这个未知数的概念（这是毕达哥拉斯学派保密的一个例子？）。这个概念又在何时被我们广泛地接受了呢？

黛尔芬特斯称它为“数字”，而且定义它作为一个可以表示“一个不确定单位”的数字。他用什么符号来表示它呢？偶尔使用ϥ（在第2章中提到在拜占庭帝国晚期的一些资料中用这个符号来表示零）。但是经常使用ϛ，时常是ϛ°，偶尔仅仅使用°！不仅仅是黛尔芬特斯使用这个符号，和他同时代的希腊人也是用这个符号。这个小圆圈（就像第2章中表示度的小圆圈）在印度昙花一现，然后就被使用到了这些亚历山大时期的著作中？当然，黛尔芬特斯对未知符号的使用是显而易见的：通过把一

个未知的数看做1这种解决问题的巧妙方法（你在巴卡沙里手稿中看到的方法）在黛尔芬特斯的问题中很早就出现过。

那么意味深长的空白呢？你会在亚里士多德的著作中发现一些感兴趣的东西，但是空白在他的著作中有两点特殊的含义。他说："空白是一个碰巧没有物体存在的地方。"这是一个非常普通的概念——也可以说是一个被暂时清除了内容的地方。听起来好像亚历山大的老师已经很好地预言了印度教中出现的"空的śūnya"。亚里士多德的两点特殊含义中的第一点（这一点告诉你的关于亚里士多德的东西比关于śūnya的多）是他好像已经掌握了它的定义，这是非常好的；虽然它不是希腊人中的一个"普通的概念"，但是这个概念使用在了亚里士多德的《物理》中，因此这个概念在随后的几个世纪中一直使用。虽然第二点的特殊含义形成了一个关于空白的戈尔地（Gordian，**按神谕，能解开此结者即可为亚细亚国王，后来此结被亚历山大大帝解开，暗指难于解决的问题——译者注**）难结，但是，对于亚里士多德来说，他定义了它的概念以后，他就马上证明它又是不存在的！空白是一个物体可以存在的地方；但是对于永恒的物体（永恒的元素组成的物体是永恒的）来说，在可能存在和确定存在之间没有任何不同——因此，所有的地方都是被物体占据着的。除此以外，他使用空白概念的主要目的是向人们证明在解释运动装置时他完全不需要这个概念。事实上，这个概念的存在对他的理论来说是一个障碍：因此，他放弃了这个概念。定义一个被清除掉事物的东西可以产生一个新的定义吗？

很幸运，我们没有必要回答这个问题，因为人们对亚里士多德的《物理》产生的反响相对于柏拉图的《蒂



迈欧篇》来说小得多，这种情形直到进入12世纪后才有所改观。柏拉图的最后对话写于公元前350年的某个地方，这个对话一直是他的读者想弄清楚的东西。对话的含义是什么，对话本身又是如何表达它的含义的？在他写下这段对话后的1000年内，人们一直认为，如果这个对话所传递的信息被理解，人们就可以进入一个神秘的世界。因此一直把这个对话作为一把可以开启神秘世界的钥匙。

《蒂迈欧篇》——也许是毕达哥拉斯学派的一个天文学家和数学家的著作，也许纯粹就是柏拉图的发明——提供了一个详细的宇宙起源情景，并且意识到宇宙在不断重生，对这个对话的理解在逐渐深入。先前，他说过存在和生成的概念，现在他认识到有第三种因素与宇宙的创造有关：

> 这个辩论使我们试图去弄清楚并描绘那个模糊的形式，我们必须假想它具有何种性质呢？它又扮演什么角色呢？它不是任何其他的东西，它是一个可以放置物体的容器——按这种状态解释，它是所有新产生的物体的护士。

他发现解释这个"容器"的性质是困难的——就像任何人第一次去理解表示"变量"或者"未知"的符号一样困难。我想在《蒂迈欧篇》中的柏拉图就试图去解释这个"容器"的性质。他说容器具有接纳所有物体的本性：

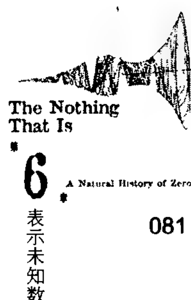
> 它总是接纳所有的物体，它从来不以任何方式固定地呈现进入它的物体的任何性质：它的本性是可以作为任何一个事物的母体，它被进入它的物体改变并表现出多样性，它在不同的时间表现出不同的性质……

为了更好地表达这个符号，他把这个符号与母亲相比，他继续写道：

> 因此，作为一个可以接受各种各样物体的符号，它必须没有任何性质；就像制造膏药的基质，制造者总是寻找那些尽可能没有气味的液体作为初始原料，这种原料还易于吸收香味……如果我们称母亲或者容器具有不显眼的和平凡无奇的本性，这绝对不是自欺欺人。

接下来，在没有任何征兆的情况下，他突然把“容器”和“空间”等同起来！

> 空间是永恒存在的，它为所有事物的形成提供了一个位置，但是它本身却难以理解……根据我的计算，最好让这些成为神话故事：存在、空间和生成是三个不同的事物，它们一直存在，甚至在天空形成以前都存在。



《蒂迈欧篇》中告诉我们的东西是难以理解的。这段文字的书写时间和丢失的上下文对于理解它也不会有任何帮助，也许柏拉图是故意把这个问题说得含糊不清，目的是让我们按我们自己的思维方式行事——或者是为了避免我们自己被动地接受它的起源。它里面星座的形状依然如旧，它看起来非常像我们已经从亚里士多德学派和印度那里看到的一样。柏拉图表达空间（chora，χώρα）使用的的词含有容器的意思，随时可以被充满物体，就像亚里士多德的“空白（void）”和印度的“空的（śūnya）”。接下来，柏拉图用于填充它的是——数字！更精确地说是各种各样的元素，这些元素被认为是来自我们在第2章中已经看到的图形数字。

我们很容易想到在代数学中的未知数——毕竟未知数是和代数学紧密联系在一起的：带有数字和未知数的等式，寻求满足等式的未知数的值。但是柏拉图的直觉是几何方法，我认为我们所看到的是代数学上完美的几何方法类比，他是通过有形的数字来填充空的空间。为了和这个“容器”的模糊性质相一致，他说我们不应该称呼这些进入它的元素一个固定的名字，而是仅仅称呼它们“某某事物（**τὸ τοιοῦτον**）”。也许卜日马古普塔用来表达未知数的名字“ **yāvat tāvat** （多达……，达到……那种程度）”或多或少也有一些这个意思。柏拉图为了强调它的数学特性，在《蒂迈欧篇》中提了两次，“这是我如何计算它的”，“这是我如何把它加在一起的”，这两个表达方法在翻译成希腊短语的时候都是使用单词“psephos”（ ψῆφος ，***没有合适的汉语意思相对应，但不影响你的理解——译者注***），用做计算筹码的石头，第二个意思与你在第2章看到的被嘲笑的计算技巧的象征逻辑有关。

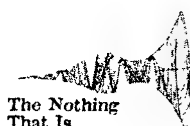
我们自己总结一下，在古希腊哲学家的思想传遍印度以前，他们关注的就是找到一个合适的符号来同时表达零和未知数，因此，看到同时表达两个意思的符号并不使我们感到吃惊。

有证据表明，在希腊人的符号系统中，人们更多地使用圆圈而不是点，而在印度人的符号系统中，他们常常使用点而不是圆圈。这些符号的起源可能是独立的，零所代表的含义不是移植过来的，而是在每个文化本身形成的，这是正确的吗？零和未知数为什么可以连在一起出现呢，这可能是最后的猜测——在你的思想中保持这样一个观念，猜测和学识像是生活在同一个房间的两个兄弟，他们性质上的分歧使他们相互远离。最终它的开始是吉尔伯特的尖体（apices）。你可能还记得，出于某种考虑他有

一个表示零的筹码，在这个表示零的尖体上有一个特别的符号是：⊗。在中世纪同样的符号看起来很像希腊的第八个字母西塔（theta）——θ，因此（你可以这么想）被称为theca。1291年达契亚（Dacia，**古代一地区和罗马一省份——译者注**）的皮楚斯（Petrus）这么解释它的来源，它可能是来自烙在罪犯的面夹或者前额上的烙印——因为你可能需要一个横着的铁丝来把你的烙铁和把手连在一起。我们可以这么说，罪犯是社会的零：我们现在依然称呼失败者为零，法国人也这么称呼。

在巴斯（Bath，英格兰西南部的一座市镇）有一个博学的人名字叫艾德拉德（Adelard），早在12世纪早期，他离开英格兰到劳恩（Laon）做了一名家庭教师；在法国女王的面前演奏西塔拉琴；历尽艰辛来到西班牙，在托莱多努力学习；他学会了一些阿拉伯语，并伪装成一个伊斯兰教徒来到科尔多瓦（Córdoba）；像很多后来的英国人那样，他出发去了东方。我们看到他不再在萨勒诺（Salerno，意大利南部一城市）外和一个老哲学家谈论奇妙的磁性；他扬帆航行经过希腊；努力地到达了西里西亚（Cilicia，托鲁斯山脉的南部、地中海沿岸、小亚细亚东南的古老地区）和叙利亚。在那里，他观察到光的传播比声音传播得快。同样是在那里，当地震来临，把包括黎凡特（Levant，地中海东部沿岸诸国家和岛屿，包括叙利亚、黎巴嫩等在内的自希腊至埃及的地区）在内的许多城市夷为平地时，他正在安提俄克附近一座被震坏了的桥上。

当他最终回到家乡的时候，他的精神被文艺复兴前的精神感动。（他说："如果你想从我这里听到什么事情，请给我你想听的理由。"）他随身带回来了珍贵的手稿，东方的真正财富：一篇关于用混合颜料来炼金的论文



(虽然它也包含了一个制造咖啡的方法)，一些关于如何在水下建造地基和如何建造拱形结构的著作。以与他的侄子对话的方式，他写了一本关于猎鹰训练术的书。在他晚年的时候，他穿着占星家的绿色斗篷，戴着绿宝石戒指，计算了斯蒂芬国王（King Stephen）星象。

他当然也带回来了数学著作（马姆斯伯里的威廉称它为“撒拉逊人的危险魔术”)，这些书是他和他后来的爱尔兰学生从阿拉伯语翻译过来的。13本欧几里得的著作和伟大的天文学著作《Al-Khowārizmī》的表格。在这些翻译的著作中，我们找到了三个表示零的不同的符号：θ（theta)，常见的ō和τ，他称这些为“teca”。

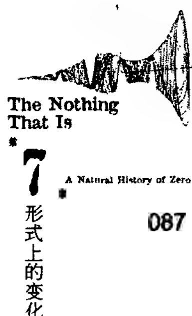
“Theca”不可能是“theta”翻译过来的形式，现在又出现了“teca”。有更合理的解释吗？有。在希腊语中“Theca”意思是——一个容器；当你用大写希腊字母书写它的时候它看起来像是这样：ΘHKH。看他的第一个字母，theta，一个点有一个圆圈围绕着它。大约在1100年，劳恩的瑞道夫（Radulph）也曾使用过这个符号，并且他使用这个符号来代表什么数字也没有，他说它的名字是“sipos”(桃花心木)——记得吉尔伯特用“sipos”来表示零，看起来很像希腊人表示计算筹码的“psephos”(艾德拉德称它为“sipocelentis”)。同时代的拉比·本·以斯拉（Rabbi ben Ezra）同时用“sifra”和“galgal”(在希伯来语中表示“车轮”）来称呼它——在“kha”的意思中，也有一个意思是，在车轮中心的孔——车轴穿过这个孔运转。

通过1 000多年前的黑暗时代，我们已经看到了一丝光明，在这束光中，我们的两个符号合并成了一个——也许顽皮的零正领着我们走入歧途呢？

第7章 形式上的变化



历史不同于传奇之处在于它在一定程度上是真实的。创造零并猜测它以什么形式出现，这些想法是很冒险的。我们知道我们一直在做这样的冒险游戏，但是就像女王的钢琴家一样，我们也许会无心插柳柳成荫。在通常意义上讲，我们了解到的所有东西都是这样的：不管零扩展数字王国的能力有多大，我们仍要将它本身当做一个数字来对待。零是从一个标点符号发展而来的，并长期保持了数字之外的属性，它不仅是一个数字还是一个字母。甚至在12世纪的印度，卜哈斯卡瑞和他的弟子们仍把9个数字的诞生归功于仁慈的造物主，他使用这9个数字来表示所有的数量，同时，零——是一个点还是一个小圆圈呢，放在没有数字的位置属于为了“消除错误”(就如第5章所见)。对零，我们最常用的词是“空”(null)，来源于中世纪的拉丁语nulla figura，“没有数字”，而且，一个法国人在15世纪的著作中很好地表述了这种流行的观点：“就像破旧的玩具想成为鹰，驴想成为狮子，猴子想成为女王，零装模作样地假扮成一个数字。”



在因果循环的过程中，一些因素使零不同于其他数字。每个数字都与特定的事物集合相联系，但零根本与任何事物无关。由此，它很容易与“变量”的符号及“变量”的概念联系起来。这种联系又加大了零与其他数字的区别。并且，我们可以注意到零经常来源于减法和负数存在的环境（这样卜哈斯卡瑞在所减的数字上画一个小圆圈也并不是偶然的）。任何5岁的孩子都会说负数根本不是数字，任何人都要花费一段的时间来认可负数。是因为否定比肯定更难以描述和掌握，才把零引入一种似是而非的危险境地吗？让我们面对下面这个问题：减法的可逆性使得本身已经很困难的计算变得彻底令人迷惑不解。如果你曾受骗相信你有11个手指，你就会明白

这个问题（左手5个手指，并且在右手上往回算，10、9、8、7、6，所以6+5=11）。然而没有减法的话，我们就不会有下面这个完美的谜语：4个人进了一个房间，7个人离开了。事先必须有多少人已经在这个空房间里面？答案是：3个。

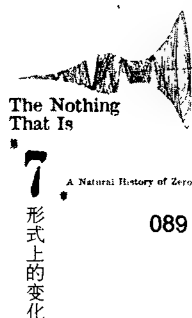
零在加减法中的应用使它与代表实物的其他数字之间的差距进一步增大了。这不仅仅是把计算筹码从一列中移开的后果，因为这些后果还不是很清楚。零像我们以前所看到的，比宾语更具有能动性，比名词更具有动词性。摩诃毗罗形象评价了这一点，他说“零和与它相加的数变得一样”。

但是摩诃毗罗和我们所知道的一些印度数学家，经过6个世纪的时间，做了比给予零短暂的热爱更重要的一些事。他们描述了零与其他数字一起时的表现，及数字间的相互作用。这些描述以控制数字间相互作用的定律形式出现。这些定律不仅使零与其他数字联系得更紧密，并建立了一个理想的数字王国，也许还会出现更新类型的数字王国，谁知道呢，但这是他们自己最好的成就。

获得数字王国公民权的要求是什么呢？考虑一下词汇和思想的遭遇。新的词汇总是像小狗一样在我们周围欢快地跑来跑去——一个月之内，人们用“弹道导弹”的速度来传播和使用它，下一个月就变成“邮递的”速度了——几乎没有新词能在几年时间内一直得到广泛使用，而更少的词汇能达到人们耳熟能详的程度，这一切都在于我们。而思想，无论伟大或者渺小：50年前还是人们的一种信仰，现在它在哪里呢？弗洛伊德的喜爱与厌恶学说慢慢成为一切事物总的原则，但这种学说很快就分崩离析了，现在谁还谈到情结或把性欲作为景仰的对象？

但数字王国比语言或思想领域更为保守：瑞士不愿接受新的成员，一旦成为一员后，就不许离开。考虑到无理数，毕达哥拉斯学派罪恶秘密的暴露动摇了希腊人对数字的信任。2 500年后，没有它们我们将不能做很多事情，虽然我们对它们之中存在的理性依然还有争论。喜欢冒险的数学家开始考虑到希罗和黛尔芬特斯时代的负数平方根。当方程的根是负数的平方根时，根叫虚根，并称方程无解。然后在文艺复兴时期，人们开始计算虚根。1673年伟大的思想家约翰·华莱士说虚根是可以假设的，但它们和负数一样是不存在的；即使它们已经和实根分开，虚根仍带有和它们名字所表示的含义相同的标志。

数学特有的运动是：要成为数字必须与已经存在的数字相互联系，或至少与其他数字地位是一样的，所以我们必须明白如何用零加、减、乘、除，这正是印度数学家所做的。当计算方法发展成为一种成熟的理论时，零和其他数字相互联系建立起来了。



这些变化慢慢地发生，并经常隐藏在一些将过时的用法中。所以，公元600年卜日马古普塔简洁地指出，一方面零的相反数仍是零；另一方面，谈到零与数字的加法时，他总结道：“零与负数相加仍是负数，与正数相加是正数，两个零相加是零。”（从1817年以来，这种解释保留了卜日马古普塔的一些缺点，即描述同一事物的不同的词之间缺乏区分。）他更关注写出减法的规则：

> 零减去负数得到正数，减去正数得到负数，负数减去零仍是负数，正数减去零是正数，零减零是零。

这就像音乐家必须知道G是C调的属音，C是F调的

属音，A是D调的属音等，却从不注意属音总是音阶的第五音。

数学家们总是追求完美。5个世纪后，卜哈斯卡瑞以完美而简洁的语言重新表述了卜日马古普塔的论述：“加上或减去零，正数和负数的值保持不变，但是被零减去之后，正数和负数变成它们的相反数。”他在36岁时写了一本书《魅力女孩》（*Charming Girl*，Lilavati）以及这一定律——可能因为它充满以下这样的问题：

> 美丽可爱的女孩，她的眼睛像古罗马神话中的农牧神！如果你擅长乘法，请告诉我135乘以12是多少？

他们没有再写过这样的数学书。

摩诃毗罗在介于这两者之间的中间领域，取得了很多成就。830年左右，考虑到零在与其他数字发生作用时保持不变（这不太符合耆那教的逻辑法则syādvāda，在那里它们的实质与表现没有区别？）。他也继续说：“一个数字乘以零是零，那个数字将保持不变，当它……减去一个零的时候。”之前的卜日马古普塔和之后的卜哈斯卡瑞都同意以上观点。

但我遗漏了一个问题，在以下三个方面他们的观点严重不一样：正数、负数、零除以零。我们自己能在多大程度上确定这个问题答案是什么吗，并且为什么呢？摩诃毗罗说：“一个数除以零这个数保持不变。”他的翻译极力解释这个错误，他说摩诃毗罗显然是认为除以零与根本不做除法是一样的。我认为，因为乘法可以看做连续性的加法（5×4可以看做5个4相加），可能他将除法看做连续性的减法（20÷5等于将5从20中减去4次）。假如这样的话，当除以零时可以看做将零从这一数字中减

去，结果仍是这个数。这种类似性也可能让他陷入将0从20中减去多少次这一问题。但是就像你所见到的，减法中的可逆性掩盖了这一想法。

卜日马古普塔是很谨慎的：

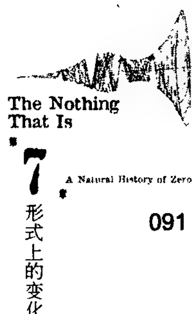
> 正数或负数，除以零，即，是一个以零为分母的分数（他将这称做“khacheda”，来自表示零的单词“kha”）。零除以正数或负数是零，或可以表示为一个以零为分子以有限数为分母的分数……零除以零是零……

对于 $\frac{0}{a}=0$ 来说他是完全正确的，a是一个正数或负数；并说（就像他开始所做的）$\frac{a}{0}$ 仅仅是将一种概念从一种类型转变为另一种类型，并不能得到结果。但 $\frac{0}{0}=0$ 仅仅是一种结果而且是错误的。

现在看看卜哈斯卡瑞的结论，卜哈斯卡瑞的说法与卜日马古普塔是非常相似的，他说：“一个数，被零除则成为一个以零为分母的分数。”但他继续说：

> 这个分数被定义为一个无穷数[“khahara”与卜日马古普塔所说的“khacheda”是同义词]。尽管可能要加上或减去许多数，但这个数以零为除数的情况是不变的，就像当世界被创造或毁灭时，无数的生物产生或消亡，但无穷和永恒的上帝是不变的。

这重要的陈述——使人联想起婆罗门的词汇来描述 $\frac{a}{0}$，引起了评论家们极大的注意。在16世纪末，评论家中的一员，试图用日晷仪获得的图案来解释卜哈斯卡瑞的意思。他说，在日出和日落时，日晷指针的影子总



是无限长的，无论日晷的半径和指针的高度是多少，情况总是如此。

你可能经常听人们说$\frac{a}{0}=\infty$，但确实如此吗？这种假设的等式意味着什么？$\frac{20}{5}=4$是有意义的，因为它是数字之间的一个等式，这一点在《魅力女孩》中可能已经告诉你了。但无穷大不是一个数（就像孩子们认为的将拉丁文*Infinitus est numerus stultorum*翻译成：无穷大是蠢人的数字，它甚至不是一个蠢人想出来的数）。那么，我们把$\frac{a}{0}$假定为什么呢？这个答案将告诉你很多关于数学的技巧。

认为所有的数字都是一样的，这样的想法极其不合常理。例如经验告诉我们6不是17（不管是不是经验，我们思想中的这些区别看来是本来固有的）。但假如数字可以除以零，那么所有的数字都会变成相同的。为什么？印度数学家能帮助我们：所有的数乘以零是零，所以，$6\cdot 0=0$，$17\cdot 0=0$，由此可见，$6\cdot 0=17\cdot 0$。如果可以用数字除以零，就可以得到$\frac{6\cdot 0}{0}=\frac{17\cdot 0}{0}$，零可以约去，所以$6=17$。它们是不相等的，所以数字除以零是不合理的，$\frac{a}{0}$毫无意义。

这种反证法从古希腊就开始应用了。为什么需要它的时候没有一个印度数学家使用它呢？确实，一部分原因是因为证明就像艺术作品一样并不按我们的命令出现，而是来源于尚未完全弄清楚的人类的洞察力；还因为印度数学家的风格，他们赞成原理却不去证明他们；另外也许是因为说一些事物毫无意义几乎等于说你不知道它是什么意思。一个阿拉伯旅行家这样评价他遇到的印度人：

……他们讨厌坦率地说出“我不知道”、公

开承认他们的无知，无论什么情况之下，说这
句话对他们来说都是困难的。

另一方面，印度人将这个阿拉伯旅行家说成：“（尖酸得）醋与他相比都变甜了。”

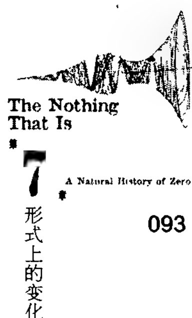
不仅仅印度人继续他们关于零的其他运算（卜哈斯卡瑞正确地宣称，$0^2=0$和$\sqrt{0}=0$），将计算扩展到无理数的范畴之后，例如$\sqrt{3}$，仅简单通过声明无理数可以像整数一样考虑。在巴卡沙里的手稿中，制定了任何种类数字计算的规则，所以卜哈斯卡瑞可以问：“听着，博学的先生们！告诉我‘乘以5’减去1的结果和‘乘以3’加上2结果相乘，结果是多少，也就是（5x-1）（3x+2）是多少？”

当不考虑虚数（甚至不考虑正数的负根——人们并不赞成卜哈斯卡瑞有民主精神的说法），卜哈斯卡瑞可以得出如下等式：

$$\frac{x}{4}+2\sqrt{x}+15=x$$

给人印象更深的是，他可以解这些方程：也是对于这一点，天赋灵感的力量是一回事，而让这种力量随叫随到则是另一回事。

你所看到的是一种正在形成中的数学和几何语言，这种语言的发展有着意义深远的结果。数字间存在令人不舒服的差距，他们代表不同的事物。当焦点从数字间的差距上转移之后，零所表示的范围也不会缩小。这些行为表现在方程中——方程的解，即使等式成立的未知数的数值，可能是零，也完全可能是其他的一些数字。因为x的未知解可以是任何一种数字，所以这意味着零和其他数字的差距进一步缩小了。但从公元500年到1500年间的几个世纪，零的形式转变是这样的：一种更为抽象



的结构代替了人们思想中固有的、一些数学家的说法。因为定数有许多名称，它们的关系也都很容易记忆。现在这些名词都必须简化为写出来的符号。这样使得数字立刻具体起来，也使没有基础的人更难以使用。因为它们简化了它们所代表的事物，但也可以让你说出一些以前没有想到的事。$x^2+3x-22=0$表示把面积（x^2），长度（3x）和22（常数）放在一个句子中。这是很难以想像的。但现在你可以很容易地写出$x^4+3x-22=0$并解这一等式。但是如何描述x^4所代表的量度呢？难怪马姆斯伯里的威廉说这是危险的撒拉逊人的魔术。



数字符号的神秘使这种称呼具有吸引力，并强化了符号超自然力的特征及权威。但是在数字神殿中还有更重要的一些事情。像零一样，数字都变得看不见摸不着了：不再是物体的描述物而是纯粹的物体本身。“三”（Three）一度像“小”（small）：它可以修饰鞋、船或密封蜡。但它现在已经与这些在很短时期内与它相联系的乱七八糟的事情离得很远。数字获得了自己的形容词：正、负、自然的、有理的（来源于“理性”一词，因为这些是分数），实的（有理的和无理的），并且在一定时期这些形容词也会变成名词（有理数、实数）。数字在计算过程中改变形态并证明自己的存在，对这一点来说形容数的词汇也表面化了。我们所看到、所感觉到的一切包括数字的起因及影响，它们是位置保持者，是容器，是计算筹码的移来移去。通过将我们自己与数字融合在一起——通过找到麻雀下降过程中的控制方程——我们至少能将所有生物的情况纳入考虑之中。

在第4章里我描述了概括抽象如何成为数学的素材：一旦你将所有事件都纳入一个有条理的网络中，你就将这一网络概括为另一个更笼统网络上的一个结点。让我

们应用这一过程，表现出数学形式上的巨大变化。这一变化大概从公元前5世纪开始，大约在几千年之后完全确定下来。像所有有力量的变化一样，这不过是重点上的一个变化：也就是我们语言中重音落在何处的问题。

我们生活中充满比喻。我们的语言充满了比喻，我们的论述和信仰通过明喻得以继续下去：A像B。在这一转变开始时，我们的比喻用来美化并阐明并不清楚的问题。如果我们说："这正像其他一些事物。""这"是需要说明的，然而"其他一些事物"，B，可能是非常生动的或人们更熟悉、更容易理解的：

> 就像一头狮子在一群人中犹豫、害怕，无论何时他们在周围形成的都是危险的圈，因此珀涅罗珀（Penelope，奥德修斯的忠实妻子，丈夫远征20年，期间她拒绝了无数求婚者——译者注）坚持自己的思想……

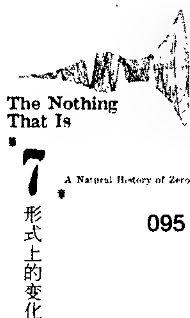
上面的是来自荷马的话，下面是维吉尔（Virgil，古罗马诗人,公元前70~公元前19——译者注）的话：

> 死亡充斥在四周的时候，疾病就像秋天第一场霜之后的落叶。

慢慢地，重点开始转移了，直到"A像B"用于使人们透彻了解所重视的问题。B是我们无法了解、无法触及的。我们所看到的是真实事物的模仿或暗示。德国浪漫诗人哈德林（Hölderlin）在他浪漫的诗歌中写道：

> 这里我们是神灵，但是在别处时，我们并不能使一切都圆满。

事实上，这种借喻方法是浪漫主义的核心。按这一



论点来说，它最初产生于2 000年前，而不是19世纪。

人们几乎不费什么力气就把差异很大的信仰和哲学统一到同一旗帜之下："是那里而不是这里。"这与赫拉克利特说的话是一样早的："神的寓言在德尔斐，它既不肯定也不否定，但是提出问题。"思想是外界的，事物的表现与它短暂地融合在一起，这是柏拉图想像力的核心。从公元一世纪起，这一理论就体现在佛教徒"四大皆空"的理论之中。他们说事物本身是空的（śūnya）（一位学者发现这是"印度思想的一个新的转折点"）。我们更熟悉的是基督教和伊斯兰教所包含的教义，但是一种更古老的宗教——犹太教，反对这些教义。

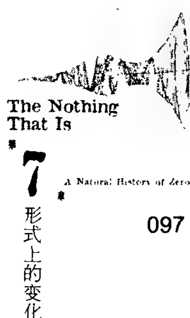
当人们问这或那是什么意思，并得到它们字典上的定义时，可以感觉到重点的转移，"是，但是它意味着什么？"在近代，出现了许多像尼采（Nietzsche，**德国哲学家，1844~1900——译者注**）和维特根斯坦（Wittgenstein，**英国哲学家、数理逻辑学家——译者注**）所写的评论文章一样丰富多彩的文章。这些评论动摇了比我们世界更辉煌的彼岸世界的形象。人们开始怀疑我们的世界"是"全部（或将重音后移成为，我们的世界是"全部"）。

我们所研究数学领域的变化，数字的名字逐渐缩减为抽象的符号，数字与它们所遵循的法则相比处于次要地位。并且，数字从数学家制定的一系列简洁公理中得到这样的法则，从而发展起来。在基本形式变化的过程中，数字间的相互作用可以证明数学公理。这就像蹦床的框架一样，这些相互作用从远处将我们的理解线索拉紧。这里深层次的秘密是我们创造了这些公理——基于公理的争论留下了伤疤，但我们确信这是我们能创造这些公理的惟一方式，所以最后公理被创造出来了。

当然，这种变化不会一直不停地向上发展，而是像

河流一样向下流动。这种向下运动将这种变化纳入它自己的领域之中。世界上有前进的人和倒退的人，柏拉图指出了前进运动，但是亚里士多德则与他意见相左。黑格尔（Hegel，德国哲学家——译者注）提出精神来源于物质，泛神论者认为神在老橡树和岩石中。在我们的时代，事物背后的理论不再神秘。地狱，在我们的民间传说中变得具体（就像我们从晚间节目中所了解的）。亚当的冲动仍存在我们的体内，像孩子时代的达尔文一样，我们希望植物能告诉我们它们的名字，并且它们的名字能告诉我们它们的本质。然而，我们使用比喻的方式发生了变化，这也反过来影响了我们自己。相对于它表面上的所有变化，我们想法的重心不可改变地发生转移。从中，我们可以看到按重要性协调事实和含义的过程。

我不能假装将我的陈述称做假设，因为它不可能是伪造的：任何例子不是举例说明了这种变化就是属于阻碍它的后退运动。应该将它当做我们所转变成的那一种比喻。为什么这样看待它呢？因为它会使事物变得有意义。



第8章 玛雅人时期：计算的黑暗面



玛雅语中表示零的符号是一个戴着项链回头看的文身的男人。这至少是令人吃惊的零符号系列中的一个。他们文化的昌盛期从大约公元前300年到公元900年，在尤卡坦半岛（Yucatan Peninsula，墨西哥附近——译者注）兴盛，由于同外界没有联系，他们为零的概念和符号的独立起源提供了清晰的证据。为什么不是这样呢？为什么这个概念没有在其他不同的文化中繁荣、流传，而只是在许多沉默、无名的“牛顿”的思想中燃烧并消失呢？因为数学是我们的通用语言，这个通用语言被与我们出生时代和地点相关的常用语言遮掩着，它为什么不用通用的优势来突破那些常用语言的结构表达，这种表达关系超过了自然界表达的关系？如果我们必须给出零的血缘关系，就像我们给出马的血缘关系那样，我们可以说：去想像吧，超越常规。



零的同类

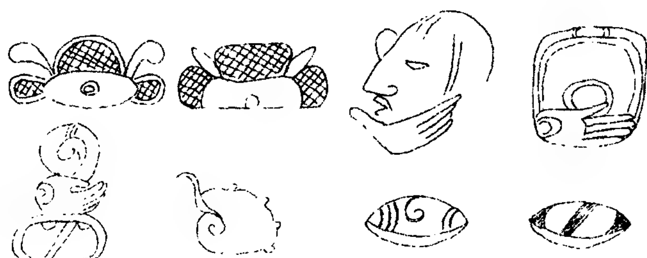
虽然我们对玛雅人的印象只是一分事实加三分想像（并且在发展上它们被流行势力同化），但在他们生活中计算不可或缺，不相信这一点是不行的，并且他们计算的是时间。用我们现代日历换算，他们关于宇宙开始的日期是公元前3114年8月13日。这是他们的第零天。你一定很想知道他们是如何得到这一天的，而且你的疑问不可能被满意地解决，可能要转向阿马的詹姆士·厄舍尔（James Ussher）大主教那里寻求答案，他在17世纪第一个10年的中期发现世界是在公元前4004年10月22日晚上6点诞生的。多大一个功绩呀！我喜欢想像他在烛光照射

的桌子前，拉丁人，希伯来人和希腊人著作的影子笼罩他，沉醉于计算的困惑之中，计算最后的和，仰望谜团解开的光芒——当然！10月22日！下午6点！在当时和后来他都是很荣耀的。对我而言，他专注的努力是古怪的试金石。

玛雅人依据他们的第零天小心翼翼地记载重要事件的日期，考古学家习惯称之为长远的记载方法（Long Count）。为了代替从开始连续计算时期方法的艰难——大脑渴望一种简单的应用模式的，他们把时间分为每个月20天（kin），每年18个月（uinal）。那样称一个360天的年为一个唐（tun），每20个唐被他们分为一组，称为卡唐（katun），因此一个卡唐有20×360=7 200天。20个卡唐依次作为一个巴克唐（baktun），或者说是400唐（144 000天）；并且他们有比这些更大的单位，直到包含64 000 000年的，称为阿拉唐（alautun）。每一个这样的分组有不同的象形文字。为了在竖立的纪念碑上显示日期，例如，准确地从第零天开始的1 101 611天，他们会记为：**7 baktun 13 katun 0 tun 0 uinal 11 kin** （7×400＋13×20=3 060年，每年有360天，所以3 060年就是1 101 600天；并且多11天就得到1 101 611天）。像他们所有的数字，这个7、13和11，由表示5的横杠和表示1的点组成（因此7就是 ∸ ，13就是 ⩧ ，11是 ≐ ），但是表示零的象形文字——在保持中间缺少的分组中至关重要——有时候像脸，有时候是完整的画像，有时候像半朵花，有时像蜗牛壳，而有时像我们无法叫出名字的东西。

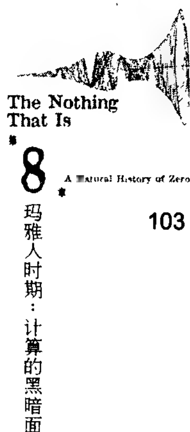
如果还不到一天，玛雅人（Maya）也小心翼翼地用零的象形文字记录这些（要知道苏美尔人不是这么做的）：这告诉你正在发生的事情对他们来说比得到准确的日期更重要。当我们努力苦苦思索他们世界的情形时请紧记

这一点。



一些玛雅人表示零的符号

360作为一年的长度可能在算术方面是方便的，但是这和事物的本性并不一致。以恒星来计算年的长度大致是365.242198天，因此在不到一卡唐的时间内，计算天、季、年的长度时你将有100天对不上号。也许，这就是为何玛雅人有和长远的记载方法同时使用的另外一个日历的原因：一个“民间”年（The Haab），也是有18个20天的月，但是在最后有5天尽情吃喝的“幻影日”，这样它就仅仅比阳历年短四分之一天（因此现在人们轻视地称他们的民间年为“茫然的年”）。



在确定长远的记载方法中的时间时，零在民间年中担负着新的特殊的意义。每月的第一天记做0而不是1；第二天是1，依次类推，第20天是19（年末的5天也称为一个月,也如此计算）。我不知道是否还有其他这样的日历，每月开始的第一天以零来标记。我们很少用这种方法计算年：仅仅当波尔布特（Pol Pot，**柬埔寨政治领导人，1975年，他的红色高棉运动推翻了当时的柬埔寨政府——译者注**）的例子出现在我们的脑海中时，我们才感觉有这样的例子。因为他称1975年为他统治的第零年——在这一年他将清除他的敌人。

这种编号方式意味着一种没有开始的开始：一个虚假的开端或序曲［因此，克里斯托弗·罗宾（Christopher

Robin，**基督殉道者，被描述为皈依基督教的巨人，致力于将游人背过河去——译者注**）开始背人的时候就他一个人]。这种计算隐藏在现代魔术一种独特机灵的诡计中。每位观众将秘密的句子写在纸片上，密封并投进一顶帽子中。蒙着眼睛、具有神秘感知能力的人随机摸出一张，努力用直觉感受并宣布它的内容。“是！”观众中有人说，“那正是我写的！”蒙着眼睛的人摘掉蒙具，打开纸片并宣读内容：正是他已经说的。重新蒙上眼睛，他选择第二张，用他的第三只眼，也许是这样，能看到上面的文字并宣读它们。

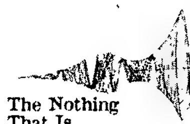
让你大吃一惊的是，另外一个人也承认了。从表面看，蒙着眼睛的人确认了他的超自然能力。并且继续如此，通过一张又一张纸片，直到所有在场的人都知道他们是超自然存在的。是这样吗？其实他们感受到的力量是零。蒙眼睛的人解释的第一个信息是他和观众中的同伙早已经串通好的。那就是零信息。当他取掉蒙具时，他所读到的随机抽取的纸条上的内容就是他将“感觉”的下一条信息——并狡猾地继续进行，当现在他读替代的纸条时，他宣布前一个信息的内容。

在民间的日历中，前月之神在第零天放下时间的重担，在位的当月之神继续这个重担。对我们来说，这发生在瞬间，就像坚纽斯（Janus）神把他的星期传给斋戒的法布如斯（Februus）神。对玛雅人而言，这个交接一定充满了焦虑。检查这些事情的神是零。用来交接的时间是一整天！我想知道在交接时人们做些什么？我们知道在5个幻影日或年末的“无用”的日子中，男人和女人既不洗澡也不梳理，也不干活，以免它交接失败。

现在因为长远的记载方法可以满足精确约束任何日期的需要，并且“民间年”使月的循环与阳历相协调，

玛雅人还有什么必要拥有另外一种日历呢？但是，他们还是有另外一种日历，并且这个日历对他们特别重要：一个神圣的年，有260天的梯凿肯（Tzolkin）年。它的特殊结构告诉你很多关于玛雅人对计算的困惑。三个日历的同时存在指向这个困惑的来源——他们处于恐惧中。

对于第三个日历，提及的两个循环我们不能不说：一是，20个日期名［艾米克斯（Imix），艾克（Ik），阿卡堡（Akbal）……］，而另一个是1到13的数字。当你了解到13个数字与前13个日期名重合，接着从第14天开始：以便第14天到第20天的天的名字［艾克斯（Ix），阿毫（Ahau）］可以与1到7的数字相对应，你就可以领会到玛雅人为什么对数学家如此尊重。这样，第1个日期名艾米克斯循环一次再次出现的时候，与数字8相对应，因此第6个日期名塞米（Cimi）再次与13相对应。第7个日期名麻尼克（Manik）就再次地和数字1相对应——这种摇摆不规则的节奏从开始延续直到13×20=260天时结束，即第1个日期名艾米克斯又一次与数字1相对应时，新的一年就开始了。 任何一个数字和日期名的组合都能准确地告诉你它代表这一年的哪一天——通过你的洞察力或者费劲的培训，并假设你拥有了计算的诀窍。



为什么会出现如此奇异的日历？也许因为对于玛雅人来说天堂有13个神，而20是人类的数字（不是一个稀奇的随意指定，而正好是你所有手指和脚趾的数量）。两个循环的交错可能意味着协调了世俗和宗教关系。在玛雅人的万神殿内还有9个地狱之神；他们长着较低的下巴并被死神统治着。玛雅人还有第四种日历就不足为奇了，把轮流统治每一天的9个夜神用9个象形文字代替，把这作为一个循环。还有29天和30天作为一个月的日历；还有第六种日历，以584天的金星周期为基础（显然这个周

期是它从太阳的一边运转到太阳的另一边)。

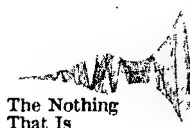
虽然他们的日历是他们计算复杂化和通俗化的惟一文化特色,的确,我们每个人都曾经被它的坚忍所折服,并且总是诙谐地开始认真地结束。当我们开始计算时需要许多努力去关掉机器,怀疑它并重新开始,迷惘中仍寄希望于它能够被利用,直到我们发现主仆已经调换了地位,并且我们也仅仅只是无情的自动机器的厂房时,我们所做的一切都是徒劳。一些人利用他们的手段已经到达目的:圣·弗朗西斯·高尔顿(Sir Francis Galton,1822~1911,**英国人类学、遗传学、气象学家,达尔文的堂兄和优生学之父——译者注**)计算能看到的一切事物,并且甚至使用10个独立的计算装置来补偿自己的手工,因此,当把商店橱窗内的货物的平均价格加起来时,他还能够轻易地知道马其顿村庄中漂亮女人的百分比。另外的人干脆自暴自弃,就像18世纪那个笨手笨脚的农民杰迪戴亚·巴克斯顿(Jedediah Buxton),他情不自禁地计算他看到的每个物体有多少根头发那么宽;当作为贵宾被邀请到伦敦去观看加利克(Garrick,1717~1779,**英国演员,剧场经理,因在当时最早出演莎士比亚剧而闻名——译者注**)的一场演出时,他在结束的时候准确地说出每个演员在剧中说了多少句话,走了多少步。我们听到把自我主义者与超自然爱好者用计算相联系的故事;我们记得老年时的弗洛伊德坚持认为,对于同一性来说节奏循环是我们渴望的表现,甚至超越欢乐,而同一性是死亡的使者。

然而,在忍受这些集体计算狂时,我们不能够忽视玛雅人,因为计算并不是和事物本身那么符合。在这里我们又一次不得不佩服他们的数学技巧。如果365天的民间年和260天的梯uni甾肯年一起开始,他们下一次第一天是

在什么时候重合？先用简单的数字尝试着解决：2天和5天的循环在什么时候重合？显然是在2×5=10天：10是它们的最小公倍数。而4天和6天的循环在什么时候重合呢？4×6=24天是它们乘积，然而24不是答案：它们最先是在12天后重合，因为你必须把那个乘积除以2，因为2是4和6的最大公约数。玛雅人懂得因为5是260和365的最大公约数，民间年和梯凿肯年将会在 $\frac{260\times365}{5}=18\ 980$ 天后又一次重合，那就是在52个民间年或73个梯凿肯年后重合。这个周期叫做日历轮回（Calendar Round），并且似乎每一次完成都会引起绝对的残忍。为什么？让我把分散的猜想组合起来，使我们能感受玛雅人的思想。

他们最大的担心是时间可能停止；为什么他们的帝国、大地、有无数星星的天空和宇宙本身不会灭亡呢？为了防止这种情况发生，他们采取了戏剧性的措施，既机智又恐怖。第一，他们将自己看到的天空中的循环运用到线性的时间中，因此时间就不会在一个循环的中间停止——但是可能在其终点停止。没问题，可以开始另一个循环：现在我们知道两个循环的终点重合这样的机会很少，时间可能停止——并且在这样一个不幸的时刻（像每52个民间年），他们用生命的精华祭祀神：血、处女、牲畜的心，这样死神就会用这些东西来复活，并且愿意重新承担起在第零日放下的岁月重担。

他们一旦找到解决的办法，一切做起来就轻而易举了。循环，再循环，更多的循环，将危险推延到更大的倍数！5个金星会合年等于8个民间年；405个阴历月等于46个梯凿肯年；在德累斯顿（Dresden）发现的手抄本列出了78的倍数，并且火星的会合年是780天；一个考古学家甚至建议：因为9是地狱之神的数量而13是天堂之神的数量，并且因为9×13=117，玛雅人也一定计算过水星的



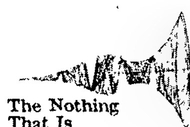
会合年，那就是116天（记住，对于没有被城市的灯光掩盖的人们来说，夜空一定曾经是多么清晰和给人以启迪）。另一方面，还有循环的分界线值得担忧：每5年（一个卡唐年的四分之一）他们的国王会以血祭天，这样他的血可以使口渴的神忠于职守。就像一些学者指出的，血是古代玛雅人生活的研钵。

这还不够，他们的长远记载方法向他们保证，时间确实不会因为巨大的跨度而停止。我们在他们的一些纪念碑上发现了一个日期系统，担当着像随你的新车赠送的质保单一样的角色：如果你有一个5万英里质保单，那么你会相信你的车将会伴你一路顺风。如果在你行驶15万英里时没有质保单，一种颤抖的感觉就会笼罩你：他们的这种系统显示从时间的开始经过了大约2×10^{27}年（是由一个人计算的），他们却几乎没有前进。比较起来，我们现在文化中的宇宙大爆炸距离现在也只是微不足道的大约120亿（1.2×10^{10}）年。但是，就像一些故弄玄虚的后现代主义小说那样，甚至长远的记载方法本身也被认为不再是线性的（而仅仅是一个大循环的周期），这种长远的记载方法被认为是这些巨大跨度循环中的最后一个周期，它已经循环回来并将永远循环向前。这样玛雅人好像取得了双重保险，不用再担心了。

重新把长远的记载方法作为自身的周期优点很多。许多年后，不但时间停止的威胁将消失，而且一个伟大的统治者的诞生（如果你们这些数学家足够敏捷）也可以被证明将在一个重要的准确时间出现。比方说，一个虚构的女祖先的诞生——意义就是时间跨度是几个循环的整倍数：民间年和梯000肯年，也许在火星和水星的会合日期诞生。多个循环的汇合点也就是一个幸运的点，

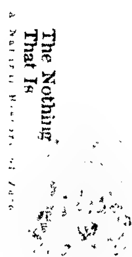
很明显，在这个点诞生就是一个重生：帕克（Pacal）是帕伦克（Palenque，**墨西哥南部的古代玛雅城市——译者注**）城的所有统治者中最伟大的一个，就是神圣的女祖先。

一旦你将类比“A像B”转化为“A是B”，想像力就戏剧性地化为深信不疑的事情，禁闭恶魔的箱子突然打开，恶魔自由了。我提到地狱的神，9个黑夜之神，被死神统治——但是我没有告诉你们这个死神是谁：它就是零。它的意义就是民间年的时间可能停止的那一天。它是每个较小的或较大的循环的终点，是一个可怕的中止。现在如果发现一个人能够担当起零的角色——并且如果他经受仪式上的死亡，那么死就会消逝！看样子，这是玛雅人仅仅能做的事情了。在一个穿着像他们英雄的运动员和一个穿着像零之神的运动员之间，他们会举行一场仪式上的球赛。这个球是一个重要的人质，例如一个被打败的国王，已经被囚禁很多年而现在被临时捆起来。两个运动员熟练地将他传接、脚踢并击打他到死亡，或者在最后将他滚下一长段楼梯来杀死他。这场比赛的结果毫无疑问总是英雄能够以机智胜过“零之神运动员”而获得胜利。在另外一场这样的比赛中，失败者将被作为牺牲品供奉。但是智取“零之神运动员”还不够，一个人将被戴上零之神的王冠，并被打掉下巴用来祭祀。和多数的宗教信仰一样，仪式的失败并不能改变什么，因为残暴带来希望。



鲁思·本尼迪克特（Ruth Benedict，1887~1948，**美国人类学家，以其对美国土著文化和日本文化的研究而闻名——译者注**）之后的下一代人类学家称高贵的玛雅文化是放荡的——但我感觉那只是狄俄尼索斯（Dionysus，酒神）的一个污点。这个鲜血浸泡的社会，

对雕刻、数字、建筑、天文学都是如此精通，使我想起我的一个聪明而又很神经质的朋友。他某一天出现在我的面前，而没有像以前那样抽搐。发生了什么？他解释说：“我抵押了我所有的神经病换来了一点精神，现在我的生活有意义了。”



第9章 费尽周折

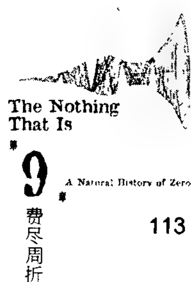
The Nothing That Is

A Natural History of Zero



零的使节

玛雅人独创的残酷方法无法使零这个死亡之神最终不再战胜他们。随着他们的文化逐渐衰落，另外一种文化开始传播开来。阿拉伯商人在四面八方传播奇异的货物、传说和技术。我们习惯于只研究他们关心的事情，而他们关心的事情是夜空的星星或无边的地平线。但是他们带来的空的（零）不是原点的一部分（只是在荒野中的他们自己使罗曼蒂克的相遇变得令人失望：对于住在那里的人而言，沙漠中有无数的沙丘和骆驼，充满了意外和事故，而不是罗曼蒂克的背景）。更确切地说，阿拉伯商人在印度已经发现位置记数法中的零，公元773年零同其他印度数字一起在巴格达出现了。因为阿拉伯商人利用这些数字来记录计算板算出的结果，所以它在估计、交易和计算上给阿拉伯商人带来了很大的方便。大约825年，当库霍阿瑞兹米（Khowārizmī）撰写关于算法的著作时，它们才被直接用来计算。阿拉伯商人的商业不仅仅是物质的：带着虔诚的热情，他们对未到之处的各类学问和发明极其羡慕。这些精神的货物，用通俗的语言来说，从大马士革、巴格达以及后来的科尔多瓦的新学术中心，像丝绸和铁器一样广泛、迅速地传播。

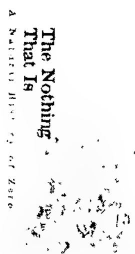


这个路线可能是迂回曲折的。例如，我们从阿维森纳（Avicenna，**波斯医生和哲学家——译者注**）的自传中看出，印度数字大约在公元990年，由伊斯兰传教士从埃及带到南俄罗斯。阿维森纳是一个值得一提的人。他出生于布哈拉，在10岁的时候从菜贩那里学习算术，在17岁前他已经阅读40遍亚里士多德的《宇宙哲学》（*Metaphysics*），但直到花了一便士买到一些注释后，才

第一次理解它。他是中世纪最著名的物理学家，尤其以学术上勇于同感性做斗争而著称。

从阿维森纳的小说《一百个神秘的感觉》(*The Hundred Secret Senses*) 中看到，可能是丝绸之路上的阿拉伯商人，或者是更早时候，佛教徒和印度旅行者把零带到了中国。

> 当然，可能是中国人发明了铅笔，他们发明了这么多东西——火药，但不是用来屠杀；还有面条——意大利人声称自己发明了面条，其实不然，只不过是在马可波罗时代从中国学来的。另外，中国人发明了数字中的零，在零出现之前，人们什么都不知道，现在每个人都拥有零。

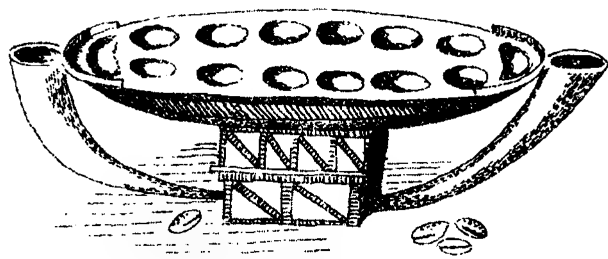


中国的零在印度的雏形不仅表现为它的形状——圆点，点可以看做是完美的圈，甚至可以说是圈中有圈——通过发音ling，零的一个特性，有一种留下什么的感觉，比如一次暴风雨过后的最后几滴雨点，或者那些在叶子和雨伞上附着的水珠：要知道许多摩诃毗罗命名的零的同义词中的一个——“**nabhas**”，代表水蒸气；更重要的“**bindu**”本身也是小水滴的意思。

有一次，当学者们漫不经心地摆弄零，并认为零起源于道教的虚无的观念，可能与印度的śūnya相互交融（如果你能描绘出一个窟窿和另一个窟窿的混合）——但是那个时代已经过去，像西芹一样围绕在猜想周围的惯用语。“它可能……”，“我们可以随意想像那可能性……”——已经相互交织在一起并把这些东西清扫一空。

我倾向于认为，被认为是世界上最流行的游戏——曼卡拉（**Mancala**）板，最初是装在阿拉伯或印度商人的

鞍袋里，作为计算板它第一次来到非洲。因为，如果它们没有线形排列，而是像你在游戏中看到的几行凹坑，它会支持我的推测，即零使中空的圆圈在这样的低压下显示它的原形：现在不是石头在沙滩留下的痕迹，而是位置本身就存在那样一个凹坑，计算筹码可以放在里面并可以挪到另外一个凹坑内（这样一个凹坑就是零的一个简便的符号）。对于一个游戏来说，有这样一个过去（就是作为检验员的工具和财政署的计算板）当然不是一个意外；因为当不在严格的场合应用的时候——就像书写“阿拉伯”数字的板，它们进入了第二个孩童时期并且又一次变得顽皮起来，这样你就可以把它们作为游戏来玩了。这些古代的曼卡拉板可能使你想知道它们是否跟上或领先于分格计数板（ruled board）。据说这些板被雕刻在卡尔奈克的亚蒙神庙柱子的底部，并且在古代沙漠旅行队沿途的石壁架上也可以看到。我没有把常用的货贝（从前南亚和非洲部分地区做货币用的）同几乎同一形式的玛雅零相比较，它们是如此的相像，但我还是抵制住了把它们放在一起比较的诱惑，因为玛雅文化是一个独立的文化，这种比较只能是一种疯狂的想像。

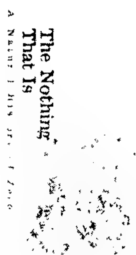


一个曼卡拉板

零一定是在970年以前来到西方，或许再早一个世纪，它的名字来自各种各样来源的混合，有的取自它的意义，

有的来自它的形状。大部分从语源上显示它们的血统，有很少一部分带着伪装的外表——但是最终全部融进了从中世纪到现在的分支中。

很多西方关于零的名字起源于阿拉伯的ṣifr或aṣ-ṣifr，它本身是印度的śūnya（空的）的一个翻译，但是希腊的"小圆石"（pebble），作为"计算筹码"，时不时增加了它的含义，还有它们的"容器"（receptacle），后来也有其他的称呼。那些两种语言之间发音和意义上的巧合也起了一定作用，它们同时给每个新术语一个迷人的共鸣。因此，希伯来语的"sifra"与"ṣifr"相关联，同时可能与单词"crown"和"counting"保持着自己的联系。一方面表示圆（例如rotula和circulus），而另一方面表示空（nulla，nibil），各种各样的中世纪拉丁名字使它们产生相互联系。在春天，轻柔的风吹拂着意大利，zefiro，zefro，zevero，逐渐被时间消弱，当它们到达威尼斯时，便变成了我们现在的zero（零）。



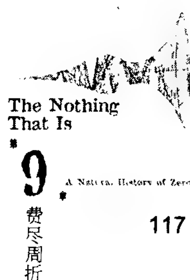
阿拉伯数字的困扰

像法语中的chiffre和德语中的ziffer变化过程一样，这些名字是表示没有任何数字还是代表通常的数字呢？它们是不是像英语中的"ciphering"（计算，算出）一样代表商人计算的公共艺术，或间谍们的秘密写法［在单词"encipher"（密码）和"decipher"（解码）中为我们保持一个低音］？当然，这个困惑代表着前面的麻烦。我想产生这样的麻烦有三个原因：迷信、困惑和不信任；这些麻烦互相交织，越来越严重。

在西方，在大部分依旧是乡村文化的地方，任何被引进的事物都会受到怀疑。从东方来的所有事物尤其危

险，常被视为陈旧的而且十分异端的。这中间被憎恨和害怕的就是摩尼教，它是公元3世纪波斯神话和诺斯替（Gnostic）教派的混合物，通过各种形式延续到中世纪。它从公平竞争的角度看待好和坏，上帝和邪恶在人类的战场上对决产生了它。当结论汇集成为体系时，对我们来说，两个特征始终停留在那个内容上：第一，虚无以邪恶而著名；第二，力量和生命可能形成——它们可以通过命名而产生。当摩尼教的二元论被对立的信仰驱赶而隐匿的时候，从黑暗的角落里出现的是临时的庆祝、简略的礼节和必要时对模糊数字的祈祷。物质变成了迷信，存在的所有更有力证据都没经过检验。

因此，在一定程度上，零在形状或意义上与虚无有联系，从根本上说，必须谨慎地对待它。罗马人在计算的时候总是试图避免这种情况。例如，经度的360度总是从昼夜平分点开始计算的，它位于白羊座的黄道带的标记处。这就是零度（0°）。然而，人们通常称它为“第一度”，也就是白羊座1°，大约公元60年普林尼（Pliny）就是这样做的，这样做扰乱了他和许多追随者的计算。它可以这样举例：如果你在地上画出四个记号，从第一个走到最后一个，你是迈了三步还是四步？显然是三步；但是牵涉四个记号。为了得到正确的答案，可以称第一个开始的线为“零”，然后你脚踩到的标记数字就相应是你的脚步数。但是，罗马人计算得出星期日后的第三天是星期二；意大利人把第14世纪称为15世纪——并且我们所有人仍然称音乐中的C和E之间隔了两个音阶，虽然涉及C、D、E这3个音阶。



当人们把零看得比较神秘的时候，迷信使零和善男信女格格不入。在炼金术中，它的形状就象一条首尾相接的巨龙，一条龙咬着自己的尾巴，形成一个圆圈，炼

丹术的转换过程就像一个循环。在魔术中，圆圈无处不在，划分出被符咒镇住的地球。这个圆没有限制在乡下村庄的习俗和宴会中：它再次出现的时候是作为容格在治疗精神病时的曼荼罗。事实上，无论何时我们都会对自己的才智不满，并认为它们与黑暗的神奇力量不相称；无论何时，我们都会感觉古代文明闪耀着比现代知识更猛烈的光；无论何时，事物之间细小的差别都在减少，而且我们认识到任何事物都可以是其他事物，同时它们各自也是自己的对立事物——这样，零完美的圆环图案就在我们面前闪耀：零是塔罗纸牌中的数字，可以改变你在游戏中的劣势。

阿拉伯数字提供出一套符号，把这些符号写在一起，这样就可以预言你的能力。你可以再次体验困惑的感觉，伴着敬畏和畏惧，就是那种外行人看到一行占星术的拼写时的感受：

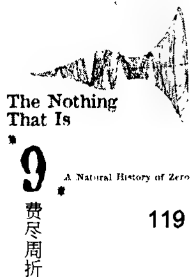
这些是什么指令，什么预言？它们仅仅是诺奥麦戈斯（Noviomagus）在1539年写的《数字》中1到6这几个数字。他声称它们是用于占星术的，但是它们与我们已知的任何数字系统都没有关系。

甚至那些符号和迷信无关，零是一个数字"donnant ombre et encombre"，像15世纪法国作家描述它：一个模糊、理解起来困难的数字。它是什么，它如何作用——最主要的，它表示什么意思。这是令人困惑的，因为任何有名字的事物（并且零有很多名字）一定是存在的——二元论者相信名字代表真实的事物。然而不存在的事物有名字吗？因为在无和有之间的无限距离

不可逾越，所以上帝不可能从虚无中创造世界；对于这个异议，托马斯·阿奎那无力地回答说，把创造看做两种状态（有和无）的变化会使你错误地想像它们之间的差距。

即使你设法忽略零代表的含义，你也不能忽略它作为一个位置符号和它的作用。这对我们这些一直在使用零的人来说是很容易的，但是对于中世纪的许多数学家来说是很困难的。想像你自己现在没有零的知识，现在开始学习最早的关于这方面的英语课本——《计数技巧》（*The Crafte of Numbrynge*），这本书大约写于1300年：

> 广泛使用后这本书被称为关于阿拉伯数字系统的书。并且这本书涉及计数方法，这个计数方法也被称为阿拉伯数字计数法。有一个被称为埃尔格（Algor）的印德国王开创了这个计数方法……阿拉伯数字系统中，在这个系统中，我们使用印德数字……如果它位于这个规则的第一位，这些数字中的每一个只表示它自己……
>
> 如果它位于这个规则的第二位，它表示自己的10倍，就像数字2在这里表示自身的10倍，就是20，因为它本身表示2，2的10倍就是20。因为它位于左边并位于第二个位置，它表示自身的10倍。以此类推……
>
> 一个圈表示零，但是，它使它前面的数字表示的数值更大，同时它失去了自身的意义，例如10。这里的1代表10，并且如果去掉这个零而且没有数字在1的前面，它就只表示1，因为它位于第一个位置……



也许你现在对埃尔格国王的表示方法没有信心——

特别是当你发现也许根本没有这个国王。但是如果你认为我们匿名作者的努力是可笑的，那把你自己放在这个位置，来尝试解释由数学家唐纳德·科努斯（Donald Knuth）新近发明的符号。这个符号在处理拉姆齐理论（Ramsey Theory）中的巨大数字时是必需的。它开始很容易，3↑3表示3^3，也就是27。3↑↑3可以被理解为3↑(3↑3)，也就是3^{3^3}，或者3^{27}，就是一个相当大的数字7625597484987。那么，3↑↑↑3就被定义为3↑↑(3↑↑3)，它就是3↑↑7625597484987，继续往下写就是：

3↑（7 625 597 484 987↑7 625 597 484 987）。

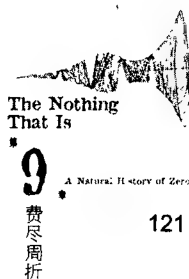
3↑↑↑↑3表示3↑↑↑（3↑↑↑3）并且因为3位于↑3的左边，&……但是，在过去和将来遇到的无穷大之前，可能我们应该到此停止。

然而，可以说你掌握了如何运用位置符号记数的方法。现在会有更刁难的东西阻挡你的道路。这些出现时已经不是梭伦或波利比奥斯的时代了，当时的情况在统治者的奇想中，差不多就像计算板上的计数筹码,计算者可以把这些计算筹码放在不同的位置来表示大小。秩序是分等级的，从乡村到宇宙，层次把你在世界中的位置确定下来。在等级制度中你想寻找平等那简直是奇谈。那么从东方带来的这种位置符号究竟是指向什么呢？事后我们可以自信地回答：指向变化。就像画报的空间，它已经被有层次的定制（图形的大小与重要性相匹配），然后再通过一个装置从整体来看一下它是否让人满意，因此位置记数法中的零是社会和政治空间的先驱。

当时，如何读它也是个问题，最聪明的脑袋都被这个问题困惑了。甚至直到1620年，约翰·多恩（John Donne，1572~1631，英国玄学派诗人和神学家）在他的

讲道坛说："事物代表的越少，我们对它的了解就越少：多么无形的、不可理解的一个事物——零！"大约200年前另一位英国人，托马斯·幼斯克（Thomas Usk）在他的《爱的证言》（*Testament of Love*）已经得出更有积极意义的结论："在阿拉伯数字系统中，零自身没有力量，然而它却给其他数字以力量。"

位置符号零的一种精彩理解在14世纪初期的科隆出现。那时埃克哈特（Eckhart）是德国唯心主义的创始人——一个多明我会的修道士，激进的神秘主义鼓吹者。他曾经这么讲道：所有的创造物都是空无；一无所有将充满这个世界；上帝一定对过去所有的知识和存在撒谎，因此一定是空无，从开始，上帝的创造就确定是无私的，并且现在仍是这样——而且无私的（Abgescheidenheit）走向零（Nihte），上帝是如此地靠近零，以至于除了上帝什么也不能接近它。这是不是在被上帝抛弃的世界中的一个坚忍抛弃的信息？除此以外：埃克哈特在思想中有一个不同寻常的幻想——他自认为是上帝，并且这么认为，如果任何一个人达到了真正的公正无私，那么他就将成为上帝。在陈述他最后一个训诫的过程中，他宣布那个瞬间他发现了真理："上帝和我是同一个人。现在我就是我，并且我既不增加也不减少任何东西，因为我是坚定的原动力，可以移动所有的物体。"当然，那正是零的含义。



即使你接受阿拉伯数字和阿拉伯数字中零的表示法，但与计算板相比较，这些如此难以把握时，你又怎么能相信你的计算呢？一旦你掌握了运算法则，加法相对容易，减法测试你的抽象能力。你是否想"用交叉"，"用转折"，"用竖列"或者在对角线上，"通过百叶窗的方法"来学习乘法？无论你选择哪一个都将花费很多工夫

［“许多脑力”，就像德国的计算专家亚当·雷斯(Adam Riese) 16世纪初说的那样］。

如果你是一个德国商人，并且认真地看待这件事情，你把你的儿子送到处理这些事情比较好的意大利去学习，［一个在纽伦堡的父亲给在威尼斯的儿子写信说，希望他能学会早起，能够经常去教堂并能够掌握算术。］在计算板上进行除法是很困难的——事实上，正是如此困难以至于一种方法被称为“铁除法”(iron division, divisio ferrea)，因为它是“如此困难以致硬度超过了铁”。但是用阿拉伯数字，当你用勾销的方法去除时，它令人迷惑：你的纸上盖满了一行行缩小不一的勾销掉的数字，结果看起来像正在航行的船只，导致了意大利人称这个计算技巧为“divisione per galea”，也就是“军舰除法”。

在法国用阿拉伯数字计算导致错误是很普遍的事情，用阿拉伯数字计算就意味着“错误计算”：这是一个明智的结论，当铅笔很少并且纸张更少的时候，你密密麻麻地书写你的计算过程，以至于到最后你没有地方书写你最终的精确结果。想像你如何“飞”过甚至“爬”过这样一个问题，例如在1489年的教科书中有这样一个问题：

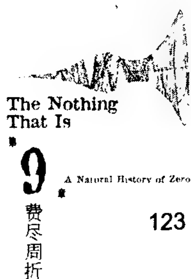
> 一个人带纽伦堡流通的30便士走进维也纳的一个钱币兑换所。他对钱币兑换员说：“请兑换我的30便士并给我等值的维也纳镑。”但是钱币兑换员不知道应该给他多少维也纳货币。于是他去了钱币办公室，那里的人们建议这个钱币兑换员：“7维也纳币相当于9林茨(Linz)币，8林茨币相当于11帕绍德(Passau)币，12帕绍德相当于13维留希芬(Vilshofen)币，15维留希芬相当于10雷根斯堡(Regensburg)币，8雷根斯

堡币相当于18纽马克特（Neumarkt）币，5纽马克特币相当于4纽伦堡便士。”30纽伦堡便士能兑换多少维也纳便士呢？

你可能知道结果是 $13\frac{23}{429}$ （大约是13维也纳便士，剩余部分建议留做小费）。

一些教师可能没有见过这样的书。大约1400年，Prosdocimo de' Beldomandi写道，说他在很多不同的书中发现很多不同的技巧，但是在所有这些技巧中，如果你最初算错了就必须全部重来。你能在哪里储存半途的结果，如何消除它们？这对他来说都太费力，太苛刻，因此他抛弃了它，在他的书中仅仅保留了对计算完全必要的一点点。

在书籍用通行语书写并且印刷发行之前，知识传播得很缓慢，危险的撒拉逊人的魔术使阿拉伯数字更加如雷贯耳。甚至当它们开始在硬币和纪念碑上出现来表示日期时，银行仍然不愿意使用它们，并且有很好的理由：零又是一个坏蛋，因为它可以被无耻的人改写称6或9，这些人还可以在它之前插入一个或两个数字。因此佛罗伦萨市议会在1299年通过一项法令中宣布，当在账本上遇到钱的数量时用数字书写是不合法的：金额必须用字母书写。一本古老的威尼斯课本解释说“惟独古老的数字（例如：罗马数字）被使用是因为它们不像新计算方法中的数字那样容易被伪造”。帕多瓦大学文具店被要求标明书的价格“*non per cifras sed par literas claros*”：用清晰的字母而不是用数字。1494年，法兰克福市长命令他高明的计算师“禁止用阿拉伯数字计算”。甚至到了1594年，在比利时安特卫普的一个教规中警告商人不要在合同或协议中使用阿拉伯数字。我们嘲笑那些不会计



算的人——但是在13世纪他们嘲笑那些会计算的人，因为他们的无用，使“阿拉伯数字”和“阿拉伯数字系统中的零”处于被嘲弄的境地：

一只带角的野兽，一只绵羊，
一个阿拉伯数字的零，
是不是牧师，在这个节日
不祝贺那圣母玛丽亚。

今年，明年，有时，绝不

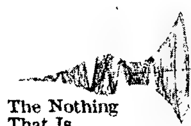
正当零努力地向西方前进时，这群蛮横又顽固不化的家伙的猜疑将它挤到一边。还有一群狡猾并更具有权力的家伙早就联合起来对付它，因为随着岁月的流逝，知道何时是世界末日变得更加重要。

罗马风格的计算弄混了在公元前一年和公元后一年之间没有零年，所以罗马风格的计算弄混了这个问题；因此千禧年的信徒不得不——像现在一样，费力地计算末位是零的年份是几十年、百年或千年的最后一年（因此对我们来说，2001年1月1日是第三个千年的开始，而且这年以前的欢庆仅仅是各地提前举行的庆祝仪式）。尽管经历了无数次对日历的改革，直到1740年，主管巴黎天文台的雅克·卡西尼（Jacques Cassini）出版了他校正的《天文学表格》（*Tables astronomiques*）（他是连续四代意大利天文学家中的第二位）。当他出版了他校正的《天文学表格》时候（他坚定地认为零具有不可动摇的地位：他出生在天文台上，他的儿子和孙子也是如此。在那里，他的家人探索宇宙、观赏法国美丽的旷野长达一个世纪之久），零年才踌躇地露面。

想知道世界末日什么时候到来，你需要注明相应的开始日期，并理解规定的时间跨度的范围。这就是为什么这种注释和计算的成就建立了基督教年代表，它的目的是，就像研究千年事务的精明学者理查德·兰德斯(Richard Landes) 观察到的，“已经注明的是末日而不是开始。”我们已经看到了这些计算，他们的每次精确计算世界末日，都是以一次次失败告终：杜科波尔派(Dukhobors) 教徒在循环而至的审判日的前夜焚烧了自己的房子和所有财产；人们和他们的预言家黎明时在山上的牧场站立，黄昏时又失望地跋涉回家。

然而这些注定的失望留下了不可计算的剩余价值：一种改变了的时间感觉和对历史的清醒目光。

> 愤怒的一天，在那天
> 我们要把数年的财产一起焚烧成灰烬



如果零日已安全地成为过去，那么此前和之后的时间里零就有了新的意义：零开始扩展到负数和正数，零不再是时间的终点而是计算的支点。过去我们需要更进一步研究将来将要发生的事情的迹象。兰德斯说，这些破灭的世界末日预言导致了寻求“用更长的时间重建一个有希望的未来”：世界末日离我们越远，就越能给我们希望。当然，它不能太遥远而使人气馁，也不能太近而使人失望，但是应该位于适度的时间范围内，至少长于一代人的时间但不超过三代或四代人的时间。

时间的真实终点，如圣约翰 (St John) 所预言，在那一天，你将听到一个微弱的声音在说：“一量器的小麦值一便士，三量器的大麦值一便士。”而且天堂就会卷成一个封闭的卷轴，星星将像未熟的无花果坠落下来，四个骑士将在陆地上驰骋纵横。实际的这一天是在公元1000

年、或者在1260年、1533年或1843年中的一天。在这一天，恶魔将会现身，焚烧一切，劫掠财物，因为这里将没有明天。但是清醒的头脑知道，如果明天不是世界末日，明天能够继续到来，那么付出的代价将是巨大的。

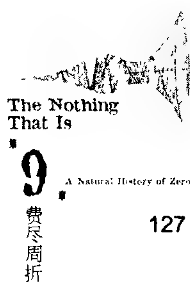
不但为了避免社会结构的破裂，而且为了改变人们对事物的认识，从单词想到它所代表的意思，从问题想到产生问题的原因。从前教堂里权威的发言，现在已经变成大声地反对《启示录》中的预言。早在《马太福音》和《马可福音》中，我们就被告知天使也不知道哪一天是世界末日。圣奥古斯丁（St Augustine）和以后的作家们（包括比德副主教）通过各种各样的方法来消除世界末日。他们希望用不同的数据、不同的计算系统来计算；他们在计算中存在着错误，这些错误把这个瞬间计算得很近。最聪明的做法是，集迷人的修道士、伪造者和历史学家为一身的安德马（Ademar），故意允许年代表在关键时期变得含糊：安德马在他抄写的年鉴中用诸如“在那些天”和“过一会”的表达来代替精确的日期。

这些惯例（世界末日的先知们更善于口头表述，而他们的对手在文章上占上风）交锋的结果是给日历原本模糊的自然状态上又增添了一团迷雾。在起始点和终点，零不见了，被转移了或者是模糊了它的概念，变成了一些秘密。当它再次出现的时候，几乎没有人再想知道这个答案。

你听到这一切时会不由自主地想到玛雅人——然而两者之间有很大的不同。就像你看到的，玛雅人害怕时间是直线的并可能有尽头。为了防止这种情况，他们将一个又一个严密循环的循环强加于它，认为这样可以强制它循环。基督教徒坚信时间是直线的，因此可以在一个末日结束，把他们带到上帝那里并和上帝一起永生。

那么季、天、周和月的循环代表着什么意义呢？它们的意义既不会贬低为异教徒的遗物（月亮在古代有很多寓意，现在只能和太阳一起顾影自怜，或者只是为了支持天空中的圣母玛丽亚）；也不会被重新评价。循环到处都是存在的，就像你手上的念珠圈一样，永无尽头。周是仿照上帝创造人类的7天而规定的，在每周的安息日，通过每周的庆祝，你的灵魂、心灵和思想会变得更美好。西方音乐的结构很好地说明了循环对直线的从属关系：悦耳的节奏，伴随着周期性的停顿，通过和谐形式的固定重复，使结束点和开始不相同。从品柱（**吉他等的音乐术语——译者注**）到乐章结尾部，从头到尾，每一段都是非凡的创造。

占优势的线性论和从属于它的循环论（周期性和永恒不变性）之间的对比有时导致复杂的妥协或合并：记得艾萨克·瓦茨（Isaac Watts）提道："时间，就像一条旋转的河流……"再早些时候，像十字架旁边圆形的浮雕和光环似乎也有类似的含义。但是，两个观点之间的紧张状态从来没有解决，在零的原始本性上又增加了最后的不确定性。现在，在它们中产生的不同特性的继承者反对把这件事情固定化。



顽强向前

尝试借用一些这样的想像，像歌德笔下的人物浮士德说的那样，零在黑暗中劈开一条道路，朝着正确的道路前进。但是历史却是沿着人类的足迹前进。

1240年，亚历山大·维亚地（Alexander De Villa Dei）写了"阿拉伯数字之歌"，1250年约翰·塞克堡斯库（John Sacrobosco）写了"阿拉伯数字的本地化"。在

大学中，两篇文章都十分流行：逐行地传诵、抄写并评论。以速记形式记录的演讲笔记，从13世纪一直保存到现在。这种科学得以传世归功于哲学家阿拉嘎斯（Algus），他用符号⊗表示零。一些评论家承认自己不理解某些不实用的分类途径。的确，在夜晚的时间里，许多大学学者面对维亚地的诗篇抓耳挠腮，迷惑不解：

> Prima significat unum; duo vero secunda;
> Tertia significat tria; sic procede sinistre
> Donec ad extremam venias, quae cifra vocatur.

"第一项是一，第二项是二，第三项是三，并且如此进行直到末端，它就称为零（cifra）。"

但是，斐波纳契（Fibonacci，**他研究一种整数数列，其中每项等于前面两项之和——译者注**）的研究最深入、最有影响。他的正确名字是比萨的伦纳德，但是他称呼自己为俾格莱（Bigollo），一些人后来认为（这个名字）意思是"木头脑袋"，另外的人认为是"旅行家"的意思。他不是木头脑袋，但是他生就一副讽刺家的面孔。12世纪的最后几年，他像商人一样旅行，到过埃及、叙利亚、希腊、西西里和普罗旺斯，观察、询问、比较并带回他所看到的一切。1202年他出版了标题就让人迷惑的书《关于算盘的书》（*Liber Abaci*），它根本不是关于算盘（或者说是计算板）的书，而是关于阿拉伯数字的问题，这是他遇到的最好的计算体系。

和维亚地和塞克堡斯库不同，斐波纳契并没有仅仅转录新的计算系统，而是像数学家那样研究这些工具。这个数列1，2，3……很好：他用另外一个数列做实验，这个数列从1，1，2，3开始，接着是5，8，13，21，34，55——每一个值都是前面两个的和。是一个木头脑袋的



愚蠢爱好吗？自然界中处处都可以发现斐波纳契数列，从鹦鹉螺贝壳到向日葵头上的交叉阴影。一位数学界的历史学家曾经写道：非常遗憾的是，不是居于世界智慧中心的巴黎大学中的一个教授推断了从比萨来的小商人的精美论证，而是那个小商人自己推断了此项论证。

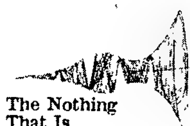


斐波纳契

然而，进步看起来好像每前进两步就会倒退一步，好像朝拜者的诅咒或在玩一个小孩子的游戏。卜日马古普塔、摩诃毗罗和卜哈斯卡瑞把零和其他数字放在相同的地位上的工作没有在向西方传播的过程中幸存下来：斐波纳契谈到了除符号0以外的9个印度数字。零一直没有和其余的9个数字具有相同的地位，直到我们读1300年的《计数技巧》这种情况才有所改变：

> ye most undirstonde that in this craft ben vsid teen figurys, as here bene writen for ensampul, ϕ 9 8 ∧ 6 Ч R 3 2 1... in the quych we vse teen figurys of Inde ···

200年之后，零才被看做真实的数字：1484年里昂的一个内科医师尼古拉斯·恰奎特（Nicolas Chuquet）在解二次方程式$3x^2+12=12x$中的未知数x时，使用他自己的方法得到 $x=2\pm\sqrt{4-4}$ ，并注释“因为4－4=0，2加上或减去0还是2，因此这就是我们寻找的数字”。但是他的著作（*Le triparty en la science des nombres*）直到他死后才出版，以至于正确确立零的地位的时间又推迟了很多年。



其间，商业的繁荣提高了对仔细计算和交易档案的要求。正如你看到的，阿拉伯数字被教授给大家用来计算但是却不被信任。陈旧但是好用的设备在持续，例如符木棒，在英格兰甚至晚到18世纪还在使用（一个世纪后，着火的符木棒堆烧尽了国会大楼）：纵向的刻痕记载着应有的数量；然后棒子从中间被截断，一部分由债务人保管，另一部分由债权人保管：它们独特的用途是防止欺诈。面粉厂主通过绑扎绳子的方法显示麻布袋中面粉的品种和数量；而且每一个人，商人和银行家、久经世故的人和文盲，知道如何用手指计算到100万的和。

但是，计算板仍然是要被打倒的对象。当封建主义离去，等级划分的不确定性出现在更加动荡的社会中时，鼓吹使用计算板的人又重新出现了：

> 对计算高手而言，所有的计算筹码都一样，并且它们的价值取决于他把它们放在什么地方。正是如此，人们在上帝面前是平等的，但是根据上帝把他们放置位置的不同，他们又是不平等的。

马丁·路德（Martin Luther，1483~1546，*德国神学家、欧洲宗教改革运动的领袖——译者注*）就是这样。两个世纪以后，一个国家消失了，但是，我们有了下面的诗歌：

> Les courtisans sont des jetons,
> Ieur valeur dépend de leur place：
> Dans la faveur，de millions，
> et des zéros dans la disgrâce!

意思也就是：

奉承者仅仅是计算筹码，

它们的价值取决于它们的位置：

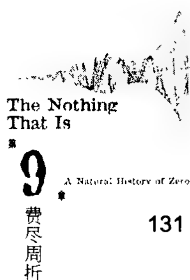
有利时，它们价值一百万，

并且恬不知耻。

（持久的暗喻是社会稳定的气压计，这个传统几乎可以写出一篇评论，你还可以看到希腊历史学家普卢塔克的变化："在计算上，手指有时价值10 000而有时又仅仅是1，国王的喜好可能意味着一切或几乎什么也不是。"说罗马人对零一无所知是对的，另一方面，说法国警句作者对计算板如何使用明显一无所知也无可厚非。）

在每个人真实认识它之前，决定性的打击突然降临了：它也是对零和西方思想进程的一个决定性的打击。事情是这样的。1340年前的某个时间，在意大利，对精确计算的需要导致了复式记账法的发明。像所有伟大的发明一样，这个概念很简单：在你的交易账目底账的同一页，以平行的专栏记载贷出和借入的账目。如果两者的差别是零，你的收支平衡，表明你的账目记载得十分精确。那么利润和亏损呢？通过第二个利润和亏损的名义账目，它们双双加入其中；比方说，利润从第一个账目转移到第二个名义账目，为此，这种转移作为交易账目借入而列出。从第二个账目的不平衡你可以立即看出你的生意做得怎么样。你可以通过将利润转到第三个资金账目来重新平衡那个账目。

零担当的任务符合作为预言世界末日失败后充当的角色：正负数的平衡点，就像在过去和将来的时间之间寻找一个过渡点一样。这些思考的新途径使负数和其对应的正数一样真实；它们之间的相互抵消反过来又重新定义零的概念。



但是这仅仅是一个新起点的开始。它为你的交流构建了词汇库，帮助你描绘交往过程中你的行为对别人和你的影响情况。马陶斯·施瓦兹（Mattäus Schwartz）是雅各布·富格尔的记账员。1518年，他在计算手册中说复式记账是“你看到自己和别人，问题和答案的一面镜子”。现在，一旦一种说话的风格建立起来，事实上它就允许并鼓励你用以前不可能的方法进行思考。这个词正好印证了物理学中守恒定律的框架。物质、动量、能量既不会被创造也不会被消灭，但是可以相互转换——像牛顿第三运动定律：对于每个作用力都有一个相等的反作用力。

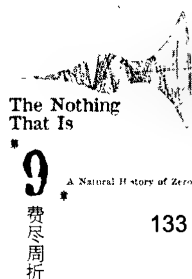
让我们再回到为了方便大家常常使用的复式记账法。1494年威尼斯的卢卡·帕乔利（Luca Pacioli）出版了一个重要的总结性著作，在他的书中，他用数字来代替商品，甚至那些无形的坏账和美好的愿望也用数字来代替，甚至减价和涨价的部分也要算进去。仔细的工作能让你从中获得更多的信息。先前，1~9的数字才称为“数字”，而零仅仅称为一个“符号”，从这件事开始，它们都被称为数字。

阿拉伯数字沿着曲折的道路前进，典型的商人都是先使用这些阿拉伯数字在他们的计算板上来计算，然后再把结果转化成罗马数字或者单词才写到他们的账簿底账上。这些新的阿拉伯数字符号慢慢驱逐着罗马数字和单词：你发现这些新符号出现在商人账簿上，这些商人来自普拉托、弗朗西斯科等城市，在1366年之后，罗马数字和单词表示数已经一次又一次地被人们抛弃。这些阿拉伯数字在秘密的途径中徘徊，从发票到记账本都在慢慢地引入它们，但是那些小心谨慎的人依然按老的方式来处理他们的问题。在卢卡·帕乔利的时代，罗马数

字就仅仅用在书写日期和正式文档上的印章——但是，最终结果的书写方式与计算过程的书写方式不同，计算过程中使用的常常是阿拉伯数字，只有在最终的结果中才使用诸如罗马数字这样的符号。

使用计算板和计算筹码来进行计算与使用阿拉伯数字来计算的人们同时存在，这两大竞争阵营一定早就形成了。我们从13世纪初一首流行的德国民谣中可以找到一些证据：

> 现在看看这里
> 罗德，挪威的王子
> 我不知道他有多少财富
> 如果懂得阿拉伯数字的那个人还活着
> 那个懂得算盘的人也活着——他精通几何学
> 他们也要花费很多时间来计算
> 才能确定王子的财富



曾有人无意中想合并这两种方法。回忆一下，吉尔伯特使用带数字的计算筹码，制造了关于两者流传很久的荒谬的说法［直到12世纪，用计算筹码计算者还被称为吉尔伯特的传人（gerbertistas）］。计算板上有一些平行的线，这些线可以在计算的时候给人提供方便。法国人在使用计算板时，这些线一度被特殊的、不起眼的、可以显示位置值的计算筹码所代替。（是不是因为这些，或吉尔伯特的尖体，导致了法国诗人误入歧途地把筹码看做零？）同时，在英格兰，计算筹码被捆成柱形换取英镑、先令和便士，通过这种方法显示它们的价值。

随着斗争的升级，更精明的人开始同时关注这两种方法。1493年在德国，乌尔里希·瓦格纳（Ulrich Wagner）发表第一个算法，并且他讲授“在线上（在算

盘上，为了方便有对应的线）计算和用数字计算”的方法。他讲授的东西在其后出版的众多书中变成了“在线上和用羽毛管笔计算”，就像1537年在圣奥尔本斯（St Albans）的《用鹅毛笔和计算筹码来计算简介》（*Introduction for to Lerne to Reken with the Pen or with Counters*）中就使用了这样的话。但是一个父亲会怎么做，送孩子到用算盘的人那里还是用阿拉伯数字的人那里学习呢？1529年，亚当·雷斯关于计算的第二本书问世。它的首页显示一个潜在的顾客犹豫不决地看看算盘，又瞧瞧那边的羽毛笔。在书中亚当·雷斯这样评论：



> 在教年轻人学习计算方法时，我发现利用计算筹码来计算的人比那些用阿拉伯数字和鹅毛笔来计算的人更熟练、更快。利用计算筹码计算的人结束计算……并且对自己得到的结果很肯定。用阿拉伯数字来计算的人完成这个计算似乎有一点麻烦。

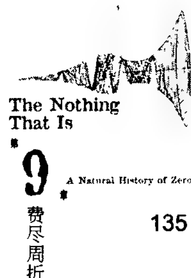
这一定很像现在困惑的父母所面对的，到底该决定他们的孩子是用读音教学法还是用字母识别法来学习呢。

1535年，德国的一幅木版画上，一个人教一个孩子使用计算板进行计算，上面显示有这样一个句子：“监护人这样做是错误的，他相当于偷窃了被监护人的钱财。”几乎在相同时间，在英格兰有一个叫约翰·帕列格雷夫（John Palegrave）的人宣布用阿拉伯数字计算能比用计算筹码来计算的人快6倍。虽然用计算筹码者进行了一场很长的保卫战，在15世纪和16世纪交替之际，零的灵活运用已经打败了他们。出版于1503年罗马教皇的一幅木版画上，你可以看到用阿拉伯数字计算的十进制者的胜利。在这幅画上，计算女神对波依提乌表示赞许——当

时她被认为是数字的发明者。波依提乌笑了，当他指向桌子上的一个零时，他的右手准备继续计算。但是毕达哥拉斯——代表使用计算筹码者，烦躁地坐在他的计算板旁边，显然他仍然在计算2乘1421，此时波依提乌在飞快地解决一个更棘手的计算。



阿拉伯数字的胜利



1514年，丢勒（Dürer）雕刻了一对作品，成对雕版上的线条非常完美，我很欣赏底座上面的两个图形：“圣杰罗姆”（St Jerome）和“麦林考利亚”（Melencholia）。他们的表情相同，画中明暗分布合理，摆放着圣洁的桌子，透视的画法也相同。我们知道丢勒很熟悉雷斯奇（Reisch）的书，正如艺术历史学家埃尔文·帕诺夫斯基（Erwin Panofsky，1892~1968德裔美国艺术历史学家——译者注）指出，麦林考利亚图形周围的随身用具可以在另外的木版画中找到：与雷斯奇书中的一样。丢勒的目的是什么？难道他是为了比较没有宗教信仰所遭遇的挫折（雷斯奇书中的毕达哥拉斯变成了研究几何学的麦林

考利亚）和基督教带来的满足：圣杰罗姆为了基督教的荣誉而折磨波依提乌?

然而亚当·雷斯是正确的：在算术计算中，熟练用计算筹码或手指来计算要比用羽毛管笔计算速度快（除了那个杰出的约翰·帕列格雷夫）。那么他们胜利的意义是什么呢？这就是我们很久以前就一直在问的关于身体和思想分歧的问题。熟练无声的操作会带你走进算术计算的最高境界，这里充满了荣耀——但是你一旦超越这个境界，你就会进入代数和其他数学领域，在那里，思想通过符号来表达，这些符号甚至可以用来讨论自己本身。如果这些符号的形式远离它们所代表的真实事物，它们就变成了一种完完全全的抽象。利用它们，我们可以方便地表述事物之间的各种关系。它们成为一种语言，为我们无声的计算技巧提供持久的支持。

当零作为一种操作符号走进这种语言时，这种语言就形成了一个完整的体系：通过改变阿拉伯数字的位置来改变其数值大小。这样给予表示数量和表示作用于它们的操作符号以相同地位的大门就打开了。反过来，现在全部符号都服从于抽象的作用，而且每一个符号都可以对另外的符号进行无休止的操作（使其他符号的位置改变），每一个符号都享有特权，都是这种语言的标记，作为这种语言中的一部分，这些符号可以看做是超越它们自己的。

第10章 令人愉快的天使

The Nothing That Is

A Natural History of Zero

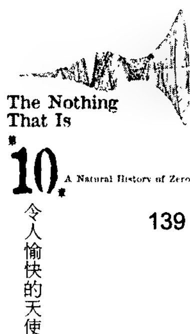


零的力量

虽然既不是奥维德（Ovid，罗马诗人——译者注）传说中的博西斯（Baucis，贫苦老妇，因与其夫菲勒曼款待下凡的神而得到好报——译者注）和菲勒曼这对虔诚的老两口；也不是德高望重的亚拉伯罕（圣经人物，相传为希伯来人始祖——译者注）和撒拉（Sarah）；我们中的每一个或几个人都曾在毫不知情的情况下款待过天使。我们只是不知道门边的陌生人是谁，也不知道每时每刻在我们意识中或浏览、或跳过、或忽略的成千上万个信号中的哪一个，可以具有揭开秘密的巨大力量，也可能是导致我们散乱思维的根源。

零就像其他阿拉伯数字一样自然而然地进入了文艺复兴时期，使之成为我们计算中不可缺少的一部分。但像所有故事中有法术的助手一样，零是如此谦卑，静静地替我们清理垃圾，可我们却很少留意，也很少尊敬它。一旦它成为像其他数字一样的数字时，我们在参加舞会时也总是会留下它打扫卫生。

你知道在故事中大人回家时的情景：喜欢恶作剧的小孩疾步走开或藏起来，却总留下一些恶作剧后的蛛丝马迹。看看我们发现了什么吧：我们认为在第7章已经解决的一个问题，就是$\frac{a}{0}$因为太大而不能表示任何东西，也就是说可以是任何一个数字。可是如果a是0，它还成立吗？$\frac{0}{0}$会像$\frac{4}{0}$或$\frac{-81}{0}$一样毫无意义吗？会不会可能出现这样的情况：其他的数字会像眼睛一样对称地排列在$\frac{0}{0}$两边呢？我们思想中一场关于数学的革命潜伏在文艺复兴的阴影下，一旦爆发，我们微不足道的怀疑都会



一扫而光——或者变成新的确定不疑的事物。

但是直到这场革命自身向我们施压；我们才享受到这项印度人发明的乐趣，这项发明才在意大利、德国、英国和法国得以传播。他们一次就全部地阐明了零如何进行加、减、乘的计算，同时我们明白当它进行除法运算时就会出现错误。如果我们仍然不能解决$\frac{0}{0}$的问题，为什么不转而考察零在幂中的运算呢？这些更复杂的相互作用应该能够像弄清楚其他数字一样弄清楚零。5^7意思是$5\times5\times5\times5\times5\times5\times5$或78 125；$7^5$意思是$7\times7\times7\times7\times7$或16 807。幂是特殊的乘法，就像乘法是特殊的加法一样。

在一般情况下，对零进行幂运算是没有问题的，0^5是$0\times0\times0\times0\times0$，仍然是0，但是交换它们的位置，$5^0$是什么意思呢？如果你试图围绕这个问题进行哲学的探讨，就会陷入可怕的境地。它是5一次也不乘自己吗？如果这样，结果是0还是没有意义？既然$5^1=5$，5^0更小还是0？那么5^{-1}呢，更小，是-5吗？听起来是不可能的。5^0是5根本不乘方，还是5吗？然而$5^1=5$，这样会导致$1=0$这个矛盾的结果。

走出这个迷宫的数学方法是把手紧紧地放在你的墙上，跟着你的脚步，不管它把你带到哪里。我们理解5^7是什么意思，也理解5^4。也同样理解$5^7\times5^4$吗？当然，那是11个5相乘，7+4个。呢？写出来看看：

$$\frac{5^7}{5^4}=\frac{5\times5\times5\times5\times5\times5\times5}{5\times5\times5\times5}$$

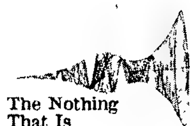
有什么方法来简化这个分数吗？可以免于做完所有的乘法再相除吗？是的。这里隐含着$\frac{5}{5}=1$，有四个$\frac{5}{5}$，所以$1\times1\times1\times1=1$，还剩$5\times5\times5$。换句话说：

$$\frac{5^7}{5^4}=5^3$$

同样简单地推出$5^7\times5^4$把指数相加得到5^{11}，$\frac{5^7}{5^4}$把指数相减（7–4）得到5^3。

这正是我们需要的，接下来回到“迷宫”中心5^0（**原文中是minotaur，是希腊神话中的半人半牛怪，这是指5^0——译者注**）那里。任意一个数字——比如7。减去自身都等于零。因此，$\frac{5^7}{5^7}=5^{7-7}=5^0$正好等于1，从而$5^0=1$。既然5没有任何特殊性，这个规律一定普遍适用：即$a^0=1$，a可以是任何值。这个结果可能奇怪而且出乎意料，但确实是这样的。

但是现在我听到一个声音，好像来自主显节（**宗教节日，1月6日——译者注**）的观众。“任何一个数字都适用吗？”它问，“如果a=0，0^0等于1吗？”很不幸不能使用我们的新规则，因为$\frac{0^3}{0^3}=\frac{0\times0\times0}{0\times0\times0}$，而其中每个$\frac{0}{0}$都把我们带回我们假设成立的问题中了。



零像远古的混沌状态，重新松散，却在幂运算中变得更加混沌。它看上去更像舞会上挑起争斗的布里多尼海角的亡命之徒：“躺在地板上，谁能把他放倒？”让我们试试。如果是指数使我们陷入困境，或许还能带我们走出困境。毕竟，它只是一个用来帮助我们的符号。它们带来简化和方便，它们的意义灵活扩展到除数字计算外的领域（像我们所看到的），而已经不是我们的老相识丢番图创造它们时的原样子了。

指数的精彩之处在于，当我们扩展它的含义时，要使新用途与旧有的前后一致，事实证明我们被迫只能用一种方式。事实上，虽然它们是我们的创造，而且我们有自由的想法，但是只能与我们已经创造的那个世界保持一致。这是通过数学对人类自身的伟大发现之一。

我们试着通过把指数扩展到更一般的数字，像负数和分数，试图来理解什么是0^0，我们用指数相减来理

解 $\frac{5^2}{5^3}=5^{2-3}=5^{-1}$。而另一方面，把每个 $\frac{5}{5}$ 变成1，那么 $\frac{5^2}{5^3}=\frac{5\times5}{5\times5\times5}=\frac{1}{5}$，所以我们定义 $5^{-1}=\frac{1}{5}$，和 $5^{-2}=\frac{1}{25}$ 类似，对于任何a，$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$。

那么像 $\frac{1}{2}$ 这样的分数指数呢？记得 $5^3\times5^4$ 指数相加得到 5^7。所以 $5^{\frac{1}{2}}\times5^{\frac{1}{2}}=5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}=5^1$。就意味着 $5^{\frac{1}{2}}$ 是自己乘以自己等于5的数字——仅有 $\sqrt{5}$ 才能满足这样的等式。所以 $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$，同样 $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$，依次类推。我们得到这个结论后，我们可以试着把 0^0 这个问题拾起来。

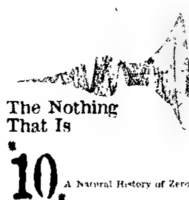
你一定同意 $0^3=0$（因为 $0^3=0\times0\times0$），$0^2=0$，$0^1=0$。现在我们知道 $0^{\frac{1}{2}}=\sqrt{0}$，卜哈斯卡瑞证明了 $\sqrt{0}=0$。同样地，$0^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{0}$ 是0，$0^{\frac{1}{4}}$、$0^{\frac{1}{5}}$ 等等也都等于0，以这种方式慢慢地接近零（使指数趋近于0），这会比断言 $0^0=0$ 更令人信服？

以下的方法或许更加令人信服。我们自己证明了 5^0 是1、4^0、3^0、2^0 都等于1，1^0 也是等于1，事实上，$\left(\frac{1}{2}\right)^0$ 也一定是1，所以 $\left(\frac{1}{3}\right)^0$，$\left(\frac{1}{4}\right)^0$ 等等也一定是1。因此，如果你以这种方式逐步接近 0^0 ——指数保持0不变，底数减小趋于0，很显然 $0^0=1$。

我们怎么办呢？是0还是1，或者两个都是，还是两个都不是？那些为指数发明出过力的人比比皆是：有一个叫尼科尔·奥雷姆（Nicole Oresme），他是诺曼底主教，大约1360年某个时期创造了分数指数——但是没有0指数。100年后有我们上一章提到的物理学家尼古拉斯·丘凯（Nicolas Chuquet），他提出了 a^0，但没有分数指数。在向对方解释自己的发明后，只有摇头，因为他们对嘲笑他们的“趾高气扬”的数字无能为力。还有路德教会

的牧师迈克尔·斯蒂费尔（Michael Stifel）：他因为试图揭开《圣经》中的数字秘密而成为一名数学家，60年后丘凯明白了如何使用零和负指数。或许他知道如何去做——但我们只听到他说："关于与数字有关的绝妙事情我可以写一整本书，但我不能这样做，只有闭上眼听之任之。"

我们已经给了零成长的动力，而且它已经长得"结实"了，它打算向我们揭示自己的秘密吗？不——我们只有去仔细地研究它。零在长期发展中成为一种用来给其他数字赋值的操作符。现在，数学在抽象化和普遍发展趋势的驱使下，它也正在转变为一种知识，给其他知识赋予新的价值。当然是零的知识。为了达到这个目的，它最初不得不在伪装中发展自己。



懂得蹲下

在我们还没有来得及注意的情况下，零的伪装在形式上已经有了发展：查明数字大体特性的形式。因为数学是一门艺术，它的描绘者热衷于为它的表演创造新的场景——就像小说家把人物放在特定的背景下，通过人物行为展现情节（因为人物是"命中注定"的）。由于小说是我们现实情形的浓缩，所以这并不像听起来那么虚假：你只要关注情节的发展，就能知道现实生活是怎样的。但是，你可能会认为数学像天文学一样，有着庞大的数量和无休止的数字，这些超出人们的想像。

但是试想一下，一个小孩子吹出的浮在夏日空气中的肥皂泡。不管小还是大的，每个都是一个完整的世界，表面闪烁着像陆地一样班驳的色彩。一个数学家也能创造像肥皂泡一样的世界：一个数字的小循环，从一点出

发再循环回来。举例来说，如果把无穷大的宇宙压缩成0到11，这些数字会有什么奇异之处呢？它们会在这个微观世界展示更深层的含义吗？做做加法：2+3是5，1+8等于9，但是6+7呢？不可能是13，因为在这个世界中没有13。6+7又等于1，因为经过一圈循环13与1重合。就好像我们在运用间隔相等的从0到11的钟表进行数学运算一样。如果我们从1到12一个单位一个单位地移动数字进行计算，就成了我们熟悉的钟表。那就意味着在这个玩具房子一样的世界里，12扮演着0的角色：把它与任何数字相加，都得到这个数字本身（3点以后的12个小时是3点，11+12=11）。

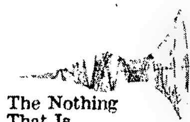
如果这作为一个太微不足道而不值一玩的游戏打动了你，那么下面你就不免会大惊失色呢。速算者将粉墨登场，他们能很快地告诉你100万小时以后的时间。假如现在是上午10点，100万个小时包含了很多个12小时，这些都不会使时间发生变化，减去这些个12，余下小于12的数目，就是你想要的结果。100万除以12，余数就会告诉你答案。由于余数是4，时间就是上午10点再过4小时或者说下午2点。心算这个除法似乎不太容易。观察一下，100除以12余4，继续相除，得到一连串零，余数一直是4。只需要进行一次除法，我们就可以得出答案，是10+4=14点或者下午2点。

如果今天是星期二，100万年后的今天是星期几？在这里实际上7就是0，我们回到开始的一天。好像日子在一个标有从0到6的钟面上滴答而过，仍然是10 000 000除以7。商并不重要，但是余数重要，它是3，星期二之后3天是星期五，这就是答案。

17世纪的法国数学家是最先组织起来，而且研究这种“闪光泡泡”的欧洲人。但是玛雅人领先他们很多，

他们制定了复杂的历法，仅仅通过除以很大跨度的时间——13或者20或者别的他们基本时间周期的长度，得到余数从而完善了他们的历法。所有的这些发明都有一个生物学依据，当我们让它自由发展的时候，我们的内部时钟都以24小时的生理节奏来运行，我们周围生物世界的每个和谐个体都有自己归于0的数字——这些不同旋转周期的齿轮充分啮合，才使整个生物个体继续下去，乃至进化。

这些缩小了的世界生动地展示了艺术是怎样从生活中抽象出来，而数学又是怎样从艺术中抽象出来的。在法国人开始清楚地表达他们的“闪光泡泡”之前两个世纪，德国和荷兰的木雕家用黄杨木造出精致而细小的山水画：罗德和她的女儿们，有狩猎野猪和兔子的精美场面，希巴女王拜见所罗门国王情形——每个都是手掌大小。在这些坚果壳上，表示数字的图画，任何一个整数都可以担当零的角色，这种做法给了我们关于重复现象问题的答案。



如果在所有这些以不同节奏脉动的“宇宙”之间，在关键的构造上都是相似的，这将是一件精彩的事情。当我们重新审视指数而且看到它们在这些环境中令人吃惊的运作方式，问题就变得具体化。

思考一下，我们提到的标有从0到6的“七日钟”。从它们当中任意选择一个你喜欢的正数（像打牌作弊者所说的）——例如3，并且乘6次幂，即$3^6=729$。现在用729减去1得到728，除以7后将没有余数：3^6-1在这个时钟上也是同样的0。试另外一个数字，例如2。2^6-1等于63，又是这个系统中的0，以1、4、5或6的任何一个数字的6次幂再减去1，你将得到同样的结果。

这是一个特殊现象吗？因为使用了“七日钟”或者

用做指数的6（=7−1）才出现这样现象的吗？非常值得注意的是，答案是不。如果你使用有从0到4五个数字的时钟，每个数字乘4次幂减1，会回到0，比如$3^4-1=80$，除以5之后没有余数。为什么在这儿停顿？一个有从0到18的19个数字的钟，把上面的每个数的18次幂再减去1，再除以19都会得到0。（如$2^{18}-1=262\ 143$，等于19×13 797）不经过计算，我就能知道$13^{22}-1$可以被23整除，而且（如果你真的想使用阿基米德的庞大数字）：



费马

$$(273\ 889\ 154\ 767\ 432)^{1\ 111\ 111\ 111\ 111\ 111\ 110}-1$$

可以被1 111 111 111 111 111 111整除。我们怎么能这么确信呢？因为法国律师，业余数学家皮埃尔·费马（Pierre de Fermat）的“费马最终定理”最近得到成功证明，这个定理在1640年提出，现在被称做“费马小定理”。如果我们认识到数字的搀杂性，理解这个定理就简单得多。5，7，19，23和上面的庞然大物是质数——除1和自身没有其他的因数。任何一个质数（记做p），比它小的任意一个整数（记做a）的p−1次幂再减去1都可以被p整除。

这么讲他的结论听起来很抽象，也非常难以理解。我们可以更生动地来描述它：拿p除$a^{p-1}-1$没有余数。如果这样会让你想起令人迷惘的禅语，那么就保留禅语嘲弄无知的本质，去领悟其中的深意吧，把它写成一个谜语：

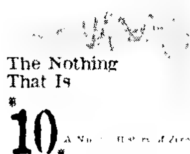
在p的世界里，
你不能把a^{p-1}去掉1后，
那么你就什么都没有了。

pのくにでは pひく一乗したら 一だとさ

看上去我们已经从用零的符号表示各种不同数字的时代，过渡到了用各种不同的数都可以代表零的时代（在它自己的泡泡里），关于费马小定理最令人惊奇的一点是它不仅揭示了循环周期为p的世界中的共同特性，而且还告诫我们，我们对于质数是无知的。我们只是正在逐步接近零的知识：给出一个质数，我们却无法知道怎样得到或预知相邻的另一个质数；我们知道这对所有的数学都至关重要。但是它们的伙伴（如果它们有一个的话）总是躲避我们，虽然已经有很多人为此奉献了毕生精力。

这种忽视怎样增加了我们别的方面的知识呢？让我们随意使用在数学上出现的5种不同方式。随你的喜好而定，品尝一个蛋白酥饼，一盘布丁或者任意一种在伊丽莎白时代称做空盘子的起泡甜食。

首先要说的是，编码专家最近发明的一项几乎不可破解的密码，正是继续利用我们对质数的无知。在这里向大家公开这个非常令人兴奋的小把戏，它看上去恰好是解开密码的关键：两个数字n和e，当你的特工想要向你传送关于鱼雷导向系统的详细说明书时，她仅仅用n和e对消息进行编码，只有你才能解开。那是为什么呢？因为e在n上遵循循环分布的方式，n是由你们事先约定的两个很大的质数生成，我们称做p和q（“很大”这里指大约



150位）。任何一个知道这两个数字的人都能够破解这个消息。反间谍活动为什么不从n次幂这方面入手呢？因为n太大了，差不多有300位，甚至目前最快的计算机也不能及时得到计划的实施情况。

但在所有过程中有一个症结存在，就像在一个古老的炖兔子的食谱中叙述："首先抓住你的兔子。"类似地，你想破解这个密码就必须找到两个大的质数，p和q。实际中存在无限多个质数，而我们只知道其中非常少的一点。但是费马和他的费马小定理帮助了我们。你知道如果p是质数，而a是小于p的任意自然数，那么$a^{p-1}-1$在一个周期为p的循环中是0，这就意味着，如果$a^{p-1}-1$在这个循环中不是零，则p不是质数！这就给你了一个找到想要的大的质数的途径。随机造出一个足够大的数字作为P的候选者，选择一个a，比如2，乘幂p−1次然后减1，这是计算机擅长做的一类事情，因此，让你的计算机做这个工作，而你可以再吃一块蛋白酥饼。把结果除以p，如果有余数，那么p不会是质数，再做第二次选择（你也可以把这种选择交给计算机来完成），重新试试。

如果没有余数，p极可能是一个质数：它是合数的可能性不到$1/10^{13}$；如果这个几率不能让你满意，用一个不同的a实验一下p，比如3。每一个"证人"a的成功验证（显示$a^{p-1}-1$相当于0）都极大地改善这个几率。一旦感到满意时，你可以用相同的方法找出一个q。现在使p和q相乘，自己记下它们而对外公布n和与之对应的e，然后你就可以等待了，这个除了你没有人能够阅读的编码的消息就可以使用了，同时游戏（并非像你想像的快步舞曲）开始了。

这里有第二个瓶子，装着"零知识的证据"：虽然你自己不知道向他所提问题的正确答案，你仍能辨别某人

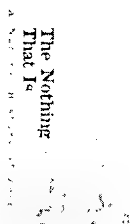
是否就是他自称的那个人。在这样荒谬的情况下，略作停顿来品味一下酒的醇香。现在让我们做如下假设（按照神秘的传统），一个似是而非的陌生人声称他是双胞胎安和安妮失散已久的哥哥。作为被他们雇佣的律师，也许不管你花费多少时间都无法区分开这对双胞胎，但是他应该能。那么，你让他坐在起居室中，让双胞胎之一进来，你问："她是哪个？"他很快地说："安。"她确认了。她离开后你重复这个过程，"安！"他说，又对了。你继续进行。让一个或另一个随机地进来。他一次次地猜对。你仍然不能区分出她们，但是大约30次成功的认证之后，你知道这个家伙似是而非的几率不到10亿分之一，因为他不是一个陌生人。你使家庭重新团圆，还能收取佣金。故事的含义是，虽然你既不知道双胞胎哪个是谁，对她们哥哥怎么区分一无所知，但是你知道"正确的事情"。

拆开第三个瓶子：一个大酒瓶。这个瓶子由于容纳了太长或太错综复杂而不能验证的数学证明而变得这么庞大。而只有计算机才能够检查这些事情，否则我们就会任凭它可能在逻辑、程序或执行上出现错误。你只需为计算机编制简单的程序来随机抽取一些重要的证据进行证明。如果没有找到矛盾之处，证明它基本上是可靠的（据一位专家说，把错误的证明误当成正确的几率，不到$1/10^{15}$）。在这方面，同一个专家偶然间宣称："用一个SUN工作站测定一个氢原子的大小也就是一分钟的事，但如果用文字写出，则可以填满我们整个已知宇宙"。你找不出一个更有说服力的例子来证明思想的所及已经是完全正确的，仅仅是不知道错误会发生在什么地方。

第四个瓶子是小的：里面盛着的大庄园的气息甚至使你眩晕。但葡萄酒不是凭空生成的，而是产生于对某



些事物“是”或“不是”的推断，并且没有任何第三种可以假设的情况。如果你接受这个亚里士多德命名为“排斥中立法则”的规则，就可以接受“矛盾证明”，正像你在上文证明“被零除是不可能的”的方法。例如使用这种证明方法来证明，如果你在一个小的密闭的盒子中放入无穷多数量的点，它们可能稀疏地分布在这儿或那儿，但至少有一个点被其余的点簇拥着，不管你多么接近它，都会有无穷多数量的点包围着它。这个点在哪里呢？证明不能告诉我们。为什么其余的点聚集在这儿而不是别处？还是没有答案。这个证明实验只说明了这个特别的点是一定存在的，但关于它的别的一些情况，甚至是微不足道的情况也没有告诉你。因此，它常常要用反证法来证明，就像当你听到有些人断言上帝一定存在而不能告诉你关于他的任何情况时若无其事地走开。这种情况令人不满意，正如叫住一个陌生人问他：“你知道时间吗？”他回答：“知道。”然后继续前行。



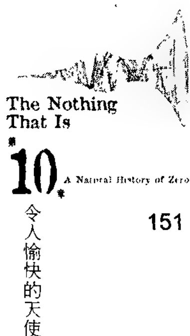
瓶子藏在后面，而且是用厚而黑的玻璃制成，所以我们甚至不能判断出是满的还是空的，上面有一个用神秘的笔迹写出的数学推理方法的标签。这里有奥地利逻辑学家库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）在半个多世纪前提出的定理。这个定理为我们一无所知的问题提供了一种求解的方式，因此，我们总是认为我们找到了黑暗中的一束光线，而且我们相信这种光线已经存在而且正在扩大，所确定不疑的东西将会扩展，直到使晦暗变成遥远的地平线。

哥德尔（关于他有一个传奇性的故事，讲他从不说任何错误的东西，由于他认为留下任何未完成的句子都是失败，所以他的言论在完成前总保持连贯）证明：个陈述的正确性不能在这样的系统中被证明——这个系

统本身也不能证明是正确还是错误。很奇怪地，这样的陈述以正确的方式表达，却不一定也能证明它们事实上是正确的。即使它们能够被证明，却不是在这个体系中，而是一个自然地充分延伸的体系中（这样就会引起新的不可确定但是正确的命题，仍然可以在新的体系的延伸中得到证明——这样永无休止）。这样的一个僵局印证了棋局的规则，但是这里的走步和规则同样重要。

如果托马斯·尤斯克（Thomas Usk）与我们一道，他现在会正低声说，一无所知无法表示自己，但对其他的有重要意义。

观点的构造



这5次前往数学艺术殿堂的旅行是在未知的领域中，在零的精神的指引下进行的，虽然数学首先而且最重要的是一门艺术，但是它是被科学用来揭开宇宙秘密的艺术。现在零将站出来领导这场揭密行动。所有我们在物理、化学、生物学方面的进步，在工程学和经济学上的成功都来自于用形状和数字语言来表达这种悬而未决的事物。在我居住的马萨诸塞州的剑桥，在一个清新的春日，我坐在查尔斯河旁边，一个白发老人停下来，坐在我旁边的凳子上，指着安德森桥对我说："你看到那些拱门了吗？我教了它们30年。"

那些拱门被设计得既雅致又能安全地承受压力，设计它们意味着首先要确定压力数据，把自然界和建筑数学化，甚至在卢卡·帕乔利之前就开始了。我们征服世界以方便我们自己，确定堆积的方式（使地球表面与石头的弧面互相抓合在一起），通过用数字描述的方程，那些满足最低要求的结构像活动雕塑一样完美平衡。我们

确定未知数，使之满足我们给予的约束条件（房子能造多高？建在哪里？怎样剪裁衣服来适应布料）。

把我们周围的拥挤和喧闹转换成为方程只是艺术的一半，如果解这个方程则是艺术的另一半。对于过去时代的数学家来说，这可是一块诱人的蛋糕，散发着不可抗拒的魅力，这对他们来说充满了挑战（他们没有可以帮助他们的老师，在抽屉里也没有解答此类问题的参考书）。他们千方百计地寻求解方程的方法，用正确的方式提出问题，就如同“芝麻开门”一样。在寻求方程解的过程中，零充当了重要的角色。阿拉伯数学家很多年来用像“完成正方形”这样的巧妙方法来取笑他们的二次方程式理论。我们的代数（**algebra**）一词实际上来源于花拉子模的书（***al-jabr wa'l muqābalah***）的标题，这本书我已经看过，好像每一种方法都可以归结于“复原与还原”（**Restoration and Reduction**）到“完成与比较”（**Completion and Comparison**）这样的过程。

代数学是怎样做的呢？这个原理总是用方程来形象地说明：

$$x^2-39+8x=-2x$$

用一位历史人物的话说，这个方程象一根金线贯穿了825年以后的4个世纪，现在已经经过了12个世纪。首先“还原”它，把负项移到另一边，变成正的，就是：

$$x^2+8x+2x=39$$

然后“简化”成为$x^2+10x=39$，即合并同类项。现在你可以像侏儒怪那样运用灵活机智来逼出未知数，告诉你它的解：这个例子中是3（–13也可以，如果允许负根值）。

惟一的问题是你需要用不同的方法解决不同的问题，当然在今天这些已经不是什么问题了。奥马尔·凯亚姆有一种解决形式符合$x^2+px=q$类型的方程的解法，另外

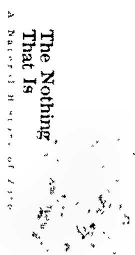
一种是解$x^2+q=px$，第三种是$px+q=x^2$。面对这样详细而且分散的形式，人们急切地希望能把它们统一起来。就像孩提时代面对词形变化表，那时的我们是多么的迷茫。我们不用失望，这种情况促使了一个重要人物的出现，他来自遥远的苏格兰，他把这些方程及跟它们类似的整个方程式家族等于零，从而用一种统一的方法来解。

这个人是约翰·纳皮尔（John Napier），爱丁堡附近的男爵。在16世纪晚期，当他的城堡没有被围攻，他用不着击退攻击他们土地和邻居的袭击者时，他涉足了一些神秘的研究："可以水下航行的装置"、"圆形双火枪战车"、向鸽子施魔法、用巫术寻找埋藏的珠宝。他在36个相近的又合乎逻辑的预示世界末日的主张中，推断预言和历史之间的关系，最后得出了结论——最后的审判将在1688与1700年间降临，他还发明了对数。据他的邻居说，在17世纪早期，他是恶魔的一员，他的衣服全是黑色的，一只通体墨黑的公鸡是他一成不变的伙伴，或许很少有人理会这些传闻。



纳皮尔

但不管怎样，纳皮尔的魔法可是特别见效的，或许是正如法兰西斯·培根（Sir Francis Bacon）所指出的一样，历史使人明智，诗歌使人风趣，而数学使人精明周密。所以，当他的仆人被发现偷窃时，他把他们召集起来（像故事里讲的），告诉他们他的黑公鸡将发现窃贼。他把黑公鸡系在一个漆黑的房间里，每个仆人都要单独进去，拍公鸡一下再出来，这样他就抓到了窃贼——惟一一个手是干净的人，他太害怕而不敢碰被纳皮尔撒了烟灰的公鸡。



纳皮尔对待方程是有魔力的。他把有一些常数项的方程变成另外的形式，通过重复的移项操作把所有项都放在左边，仅留一个零在右边。这就是他所说的“等于一无所有”。这个技巧为什么这么重要？这取决于乍看之下不起眼的东西：如果两个或更多个因数的积等于零，那么其中一定有一项等于零。转化成数学的语言也许更有助于你的思考。

如果$ab=0$，那么$a=0$，$b=0$或者a，b都等于0。

但是你也许会马上指出，在他熟练变换之后，仍然没有因式的积的形式，而是一些含有变量的项，还有一个常数项——这个条件怎么应用呢？即使可以利用，有什么意义呢？

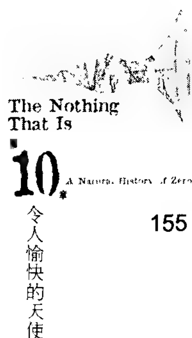
永远不要低估一个术士。如果你看到他把花拉子模的方程式变换到$x^2+10x-39=0$的形式，就会领会纳皮尔的思想。我们可以把左边写成怎样的积的形式呢？稍做思索，我们就会知道$x^2+10x-39=0$等同于$(x-3)(x+13)=0$。但若$(x-3)(x+13)=0$，那么其中至少有一个因子为零：所以或者是$x-3=0$，或者是$x+13=0$。你马上就可以得出$x=3$或$x=-13$。

当我们所求的x是一个实数，这个方法适用于一切情

形。在各种情况下，一旦你发现因数相乘后“等于‘零’”，就可以把每个因式依次设为0，从而求出满足方程的x的结果值。这就是为什么我们的大桥可以耸立至今，我们的火箭能够降落在预定地点的基础。

这给我们带来了巧妙的方法，从下列途径考虑使用零：运用物理守恒的原理，经过一系列变化，结果不变。纳皮尔怎么会想出这样一个我们现在不屑一顾的、想当然的方法呢？“我的祖先生活在荒诞和真理的分界上。”纳皮尔先生在1857年说。或许想像力需要这样的昏暗背景，这样试探性的突破才会欣欣向荣。

但是纳皮尔的理论仍有严重的问题，“一旦你找到了因式”——是的，但是怎样找到它们？各个项的移动遵循怎样的原则呢？就像要求把一个太极高手的一招一式用电脑打印出来一样，这是一个不太容易解决的问题，有些关键的规则是会有所帮助的，但是当我们试图对一个代数式分解因式，会认识到数学其实更像是一种运气。



如果你想要更近距离地审视这些介于工艺与艺术之间的技巧，当你发现狡猾的零所扮演的另外角色时，你会一次又一次感到吃惊。透过一个椭圆的窗子展望，远处越来越狭窄，新的发现越来越稀少。在最令人注目的位置，是一个任何一个初学代数者都熟悉的问题，解答：

$$x^2-1=0$$

如果你放两个圆括号，把x放在前面：

$$(x\quad)(x\quad)=0$$

在每一个x后面放一个1，看上去很合情合理。但是：

$$(x+1)(x+1)=0$$

得到$x^2+2x+1=0$，多出了2x和有着错误符号的1。再试试$(x-1)(x-1)=0$，得到$x^2-2x+1=0$，仍然有错误，只是有所不同。很显然，既然惟一可以放在每个括

号内的整数是1，你需要可以抵消掉中间项，解决方法就是有一个因式内放上+1，另一个因式内放上-1，可以得到：

$$(x-1)(x+1)=x^2-x+x-1=0,$$

$-x+x=0$，得到了想要的分解后的因式。

注意，这里的零乔装为$-x+x$，为了完成使命而很快地出现，然后又消失了，它甚至在这个著名技巧的名字里面都不能有所体现："两个平方的差"（在这个例子中，两个平方是x^2和1，1与1^2相等）。两个平方的差，$r^2-s^2=0$。现在可以轻松地分解因式为$(r+s)(r-s)=0$。这种魔力一半的功劳要归于我们熟悉的形式。

现在不管你什么时候看到类似于$x^2-64=0$的式子，都可以分解为$(x+8)(x-8)=0$。甚至$x^4-64=0$也适于这种形式，你可以把x^4看做$(x^2)^2$，所以$x^4-64=0$分解因式为$(x^2+8)(x^2-8)=0$。

但是，如果很偶然地你想对像$x^4+64=0$这样的代数式分解因式，能得到什么呢？再拿出0，现在它的作用更令人咋舌，更加背离常规。由于$x^4+64=0$看上去很难处理。试着仍然写出有x^2的因式框架$(x^2\quad)(x^2\quad)=0$，但是接下来怎么办呢？你必须在空白处填上8才会得到64，但是没有多项式能够满足：

$$(x^2+8)(x^2+8)=x^4+16x^2+64$$

$$(x^2-8)(x^2-8)=x^4-16x^2+64$$

$$(x^2+8)(x^2-8)=x^4-64$$

我们撞上的是两个平方的和而不是两个平方的差：$(x^2)^2+(8^2)^2$。

回想一下我们对$x^2-1=0$分解因式的过程，也许可以从中找出解决的办法。照我们先前的做法来做，我们以$-x+x$的形式在x^2和-1之间插入了0，即：

$$x^2-x+x-1=0$$

分解为 $(x+1)(x-1)=0$。同样的，我们需要在x^4和$+64$之间插入0，现在特别之处是要加和减一个完全平方，希望这样可以得到两个平方的差，这样就可以分解因式了。这种技巧是它的无名发现者仅存的成果。但是使用哪个式子呢？另外的一个无名氏碰巧找到了幸运的多项式：$16x^2-16x^2$。如果把它插入$x^4+64=0$，可以得到：

$$x^4+16x^2-16x^2+64=0$$

这看上去不是特别有用，除非凭经验重新排列多项式：

$$(x^4+16x^2+64)-16x^2=0$$

一分钟之前我们刚遇到过前面的式子，就是$(x^2+8)(x^2+8)$，即完全平方式$(x^2+8)^2$，而且：

$$16x^2=(4x)^2$$

x^2+8是r，4x是s，即r^2-s^2，因此因式分解为$(r+s)(r-s)$：

$$(x^2+8)^2-(4x)^2=0$$

分解因式为：

$$(x^2+8+4x)(x^2+8-4x)=0$$

这就是为什么0帮助了我们分解因式：

$$x^4+64=0$$

从我们的椭圆向窗口看下去，0消失了，轻轻地敲打出更难解决的表达式：

$$x^4+x^2+1=0?$$

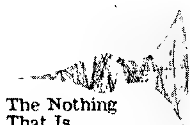
插入这样0的形式x^2-x^2，重新排列：

$$x^4+2x^2+1-x^2=0$$

也就是：

$$(x^2+1)^2-x^2=0$$

分解因式为：



$$(x^2+1+x)\ (x^2+1-x)=0$$

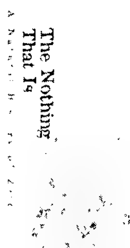
那么$x^5+x+1=0$如何分解因式呢？这儿添加的0的形式有一点庞大：

$$(x^4+x^3+x^2)-(x^4+x^3+x^2)$$

最终你将算出分解因式后的结果是：

$$(x^2+x+1)\ (x^3-x^2+1)\ =0$$

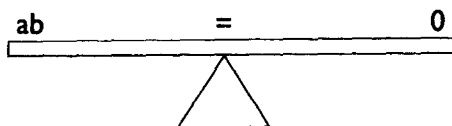
现在我们看到，0，是分解因式中精心的舞蹈策划家，它在微积分中大显身手，进入最难理解的数学分支：数论。在这里，它帮助我们设计难以破解的密码。呈现出各种各样的伪装，它本身被想像力伪装。它已经帮助我们理解了想像的本质，这是真的吗？威廉·布莱克说："当你说这个世界上根本不存在想像时，你无疑是在犯错误。"也许，当他这么说的时候，他是对的。对我来说，这个世界是一个连续的充满想像或者幻想的世界。



不要在身后留下破坏

设想和事实的区别是：设想或许是你所期望的，而事实是世界所期望的。那么在数学上，什么情况下我们的假设与这个世界是相吻合的呢？思想是不是像半透膜一样通过内外表面的交换而进行流通呢？是不是不经意间你就同意了这样的观点，以我们的经验可以让数学比其他任何事情都肯定吗？我们做出的结论，既不是因为忠诚也不是因为权威，而是由审稿书的最后几行得出的。有时它们像肖邦华尔兹那样简单，有时又像贝多芬四重奏那样雄伟，然而这些都是音乐而不是数学。

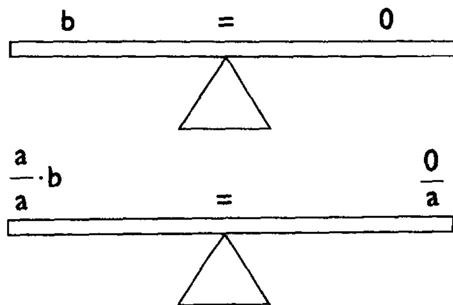
约翰逊博士曾经说过，计算的好处在于它让在心中长期不能肯定的事变得肯定。计算法则所依赖的基础是什么呢？现在分析一个方程式，复杂的问题最后归结为：



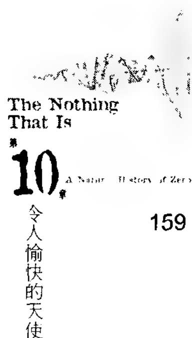
如果ab=0，那么a一定为0，或b一定为0。这个事实来源于何处呢？让我们继续下去，不是顺着时间，而是随着已经做出的广泛尝试，一定会有惊人的发现。

我们试图证明如果a不为0，而ab为0，那么b一定为0。让我们来看一下跷跷板的简图，有关方程式的所有恐惧心理均会被驱散掉：假设ab=0意为跷跷板平衡得很好，ab在一端，0在另一端。

为了保持跷跷板的平衡，无论你在一端做了什么，另一端也需要得到相应的处理。设定a不为0，即要证明b为0。既然a不为0，我们就可以对其进行分割——即一直向前走，把两边都分为a份，我们知道a/a即为1，因此左边即为1×b，也就是b。最后一步是令人满意的，0/a是(1/a)×0的缩写。既然我们假定a不为0，则1/a为某个数，但是任何数与0相乘后均为0。平衡的跷跷板告诉我们b=0，而这也正是我们所希望的。



不寻根究底的话根本就谈不上是对真理的追求。我说$\left(\frac{1}{a}\right)\times 0=0$，因为任何数与0相乘皆为0。为什么我们把它认为是天经地义的，难道就不能问一下为什么这是正确的吗？顺着楼梯往下走，我们要从根本上说服自己，



对任意数n（或者是a，或者是k，或者是任何一个匿名起诉人的化名，我们只是想在说到任意一个数时其实对其他的数也是成立的），n×0=0。我们知道两个相当深奥的真理。第一个是，任何数减去自己后就没有了：k–k=0，k为任意数。另一个真理是关于乘法和加法的：两个数的和与另一个数相乘，将两个数分别与第三个数相乘所得结果再相加，这两种算法的最后结果是一样的。即d×(e＋f)=d×e＋d×f，这就是乘法分配律，这是很奇怪的事情，既然是基本原理，却很难记住和应用，孩子们总是将5×(7＋13）做错，因为这个答案应该是5×20=100，这与5×7＋5×13是一样的，而他们老是忘记在另一个数上乘以5。

但是我们不会忘记。我们将这两个真理摩擦后即会迸发出火花，即n×0=0。既然0和k–k是一样的，我们就可以将n×0改写成n×(k–k)。现在应用分配律：n×0=n×(k–k)=nk–nk，nk仅为某一个数，于是nk–nk即为一个数减去自身，即为0：n×0=n×(k–k)=nk–nk=0穿过等式的桥梁，一边为n×0，另一边为0。

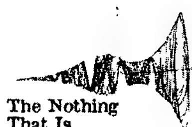
我们最终肯定是0吗？你认为在乘法中，0是个无效因子吗？对人类特性的考察始于法国革命的整肃，纯洁的人总是发现有人更纯洁。难道我们就不需要更基础的原理来支持以上的两个规定吗？如果我们这样做了，难道就不需要前提，顺着没有尽头的螺旋梯到达火苗没有熄灭的地方？对于一个比从罗伯斯庇尔（Robespierre）和革命群众那里得到的更加深刻的事实，推理所要求的确定性是达不到的，这是由推理思想本身的特性造成的。为了结束这种无限的回归，我们不得不在某一点上说："我们掌握的这些定理是不言自明的。"

这些就是分配律，以及对于任意数来说k–k=0。如果



你愿意（用希腊语意为：认为值得）称这些最后的依据为公理；或者仅仅因为从论据充分考虑，接受罗马法庭的说法，称之为基本原理；或者赋予它们特殊的推理地位，就像直观、无须赘述定理；或者称它们是我们正好碰上的一场游戏的专断规则，或是相关定理；或者从一开始就折射出了我们特殊的大脑工作方式：所有这些都确认我们没有必要另觅途径去证明，对我们自己而言，这些定理是显而易见的。

在我们所见到的完整结构的背后，我们是背景的转换者和操纵者：在世界从何而来又向何处去的问题上，我们是孤独的求索者。这种抽象是伟大人物必须承担的责任，永远更真实与永远的铭记是等同的。在这种证据稀少的世界里，0将开始另一项伪装使命，那就是使自己适应公理的苦行僧生活。



由于印度数学家将重点从它们是什么转移到了它们做了什么，我们看到了0变成了像其他数一样的一个数。后来，由于它们在解方程式中极其有价值，因此它们的地位改变了，并且得到了加强。在谈到结构时，在语言中开始出现迹象，数字不再是抽象的事物，而是一个实在的事物。我们不仅可以说“4棵树”，而且可以只说4；不仅可以说是0个千，还可以单说0。现在由于我们试图明白这些数字是如何工作的，我们明白（像公理中说的）它们结合起来的内容要比它们本来单独存在时要多得多：如果我们完全理解了加和乘的操作，把数字相加或相乘的结果，就犹如在夏日里水果会成熟一样令人深信不疑。

分配律告诉我们加法和乘法是如何相互作用的。我们需要的其他公理是从牛顿的观点发展而来的，牛顿研究万有引力，他不再问这是什么（流体、物质、力），而是问它是如何工作的。随着他的关注中心从古老的问题

上转移到更加抽象的力学问题上，在重力的影响下，他发现天体间的相互吸引力与它们之间的距离的平方成反比。最终证实这对于理解这个世界，以及预测天体在宇宙中的位置非常有用。

用同样的精神，数学家们逐渐地不再追问加法和乘法是什么，而是坐下来开始整理它们是如何运算的。考虑到避免被无关的运算名称和符号所误导，遂用中性符号“*”表示，也就逐渐形成了以下原理：

1. 将任意两个数a和b相加或相乘，将得到另一个数c。即a*b=c

2. a和b的顺序并不重要，结果是一样的，即a*b=b*a

3. 当你对三个数a、b、c进行运算时，无论你如何组织它们，结果是一样的：a*（b*c）=（a*b）*c

4. 有一个特殊的数，我们称之为e，对于任何一个数a与e相加或相乘，其结果均为a：a*e=a

5. 对任意数a，还有另外一个数a’，当a与a’相加或相乘时就得到了这个特别的数e：a*a’=e

这些原理告诉你关于加法和乘法的所有规则，但是我们感兴趣的是加和乘，+和×。用*其结果是什么呢？奇怪的是，似乎都可以描述。加并不是乘：2+3≠2×3。经过这种严格的区分，我们还不能正确简化自己吗？

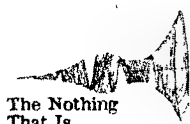
0的出现拯救了这个时代，如定理4中所描述的那个特定的数字e是什么呢？对加法来说，e是0：也就是说a+0=0。然而对于乘法来说e是1：a×1=a。因为0卸下历史加在它身上的重担，成为加法的助手，为被加数本身。同样1也被分离出来，所有的数与1相乘后总是被乘数本身。重新回到*，我们必须区分它的两个形式：0≠1。

这个认识促使原理5也需要修改，对加法而言是对的，如果将*换为+，e是0：每个数都有其相反数a’，我们记为

–a，因此a*a'就转化为a+(–a)=0。在没有日期的记载方法之前，0表示界于过去与未来之中的现在。在复式记账簿上，0表示借款与贷款的平衡。通过这个神气的环，正数可以变成负数，尽管温斯顿·丘吉尔餐后的观点是这样的：

> 对数学我曾经有一种预感，我明白了它的全部，深奥的和浅显的都展示在我的面前。有人可能看到了维纳斯像，甚至是市长阁下的展览，而我看到无限数字中的一个数，且看到它从正到负改变着自己的符号。我确实看到了这是怎么发生的，为什么背叛是无法避免的。但这是在晚饭后，我也就顺其自然吧。

但是对于乘法，原理5就不再完全正确了。我们说任何数除了0都有其倒数，通常记做$\frac{1}{\alpha}$，因此a*a'=e，即为a×$\frac{1}{a}$=1。0或许是加法的助手，而乘法保留了它的反叛地位。



顺便说一下，分配律意识到了加法和乘法中的不对称特点，它告诉我们a×(b+c)=a×b+a×c。但是你不能改变这里的+和×的作用：a+(b×c)=(a+b)×(a+c) 这就不正确了。

沿着光荣足迹走过来的我们，去重新理解那些最基本的实数，依然是一件非常困难的事情，那些只有0和1是实数的规律，所有的数字以及其他行为都要受到这些规律的支配。那些回到过去并对这些规律提出质疑的人，最终所得到的依然是遵守并保持这些规律。但是来库古(Lycurgus，9世纪斯巴达立法人，被认为是斯巴达法典的创立者——译者注）再也没有回来：这是他给予斯巴达的礼物。

第11章 无穷小

The Nothing That Is

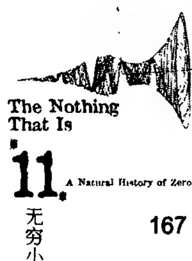
A Natural History of Zero



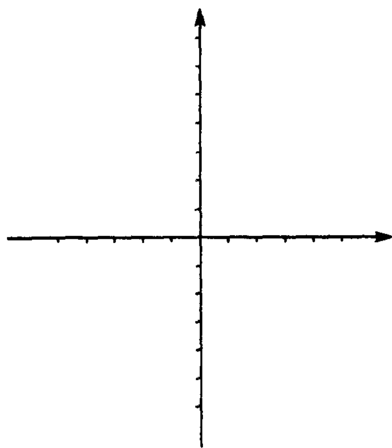
懒洋洋地走向伯利恒

只有选择遗忘过去才能让我们继续前进，将一度被怀疑的事物作为最常识的东西来确信，将通过努力得到的东西作为我们与生俱来的权利。对待零也应该这样。它从一个位置符号浓缩为我们思考时所用的符号，在初等数学中零的主要作用在于解方程。

到17世纪，我们思考等式的方法改变了。世界动态变化的映射关系是服从函数关系的，就像我们的兴趣从事情是什么转移到它们如何得来那样。零的绝对本性毫无疑问经历着最惊人的转换。



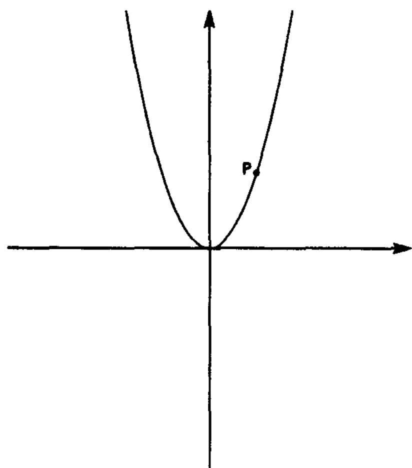
现在我们关注的问题是运动的问题。如何预测行星的轨道来确定行星在下一刻的位置或确定一个炮弹的飞行轨迹？困难在于两都是沿着弯路径运行的，而从希腊几何学开始，我们所有能理解的运动都是从直线的角度考虑的。例如，如果我们知道一条曲线上某点的斜率，我们仅仅可以说出它将朝哪个方向延伸——但是在曲线的一个点处怎么会有一个斜率呢？把曲线放在一个坐标平面上是有助于说明这个问题的［很幸运这个问题已经被费马和他同时代的笛卡尔（**法国哲学家、数学家，1596~1690——译者注**）解决了，现在我们可能都已经认识

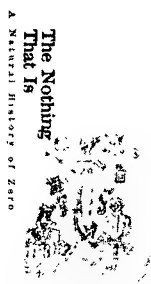


坐标平面

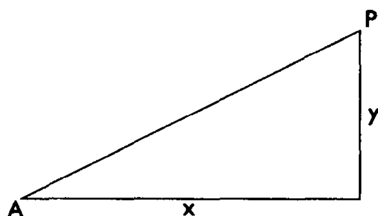
他们了］。

如下图所示：



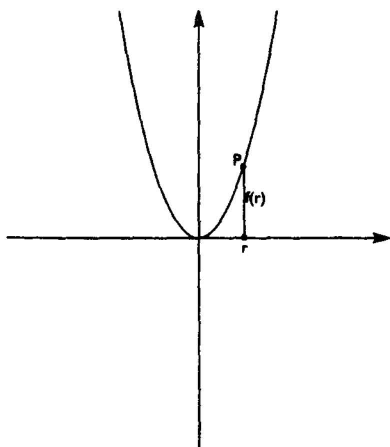


但是斜率是属于直线，如下图所示，从A到P的路径，在产生一个水平距离x的同时上升一个垂直的量y——我们说它的斜率是比值y/x（因此一个1:10的斜坡每前进10个单位就上升一个单位：对于汽车来说这个坡度不算什么，对于骑脚踏车的人来说令人疲乏不堪）。

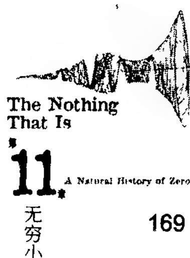


过曲线上的某点画一条切线，即使只是冒险猜想一条平滑曲线在某点的斜率是什么，也一定会引起一些人的暴怒和另外一些人的嘲笑。晚至19世纪，叔本华(Schopenhauer，1788~1860，德国哲学家——译者注)对这个问题还依然踌躇在悲观失望之中，他引用一个幽默作为他愚蠢理论的证据（这个笑话好像是讲这里既有

角度又没有角度。它一定是他讲述的方法)。

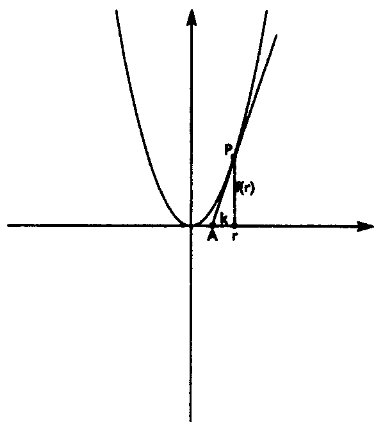


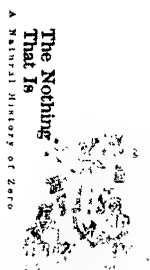
这个问题巧妙的解决方法依赖于由来已久的思想：希腊人的思想不时产生出新的思想；小书写体(minuscule，一种在7世纪至9世纪之间从安色尔字体发展而来的小的手写字体，用于中世纪时的书写——译者注）的秘密，慢慢流行，又被修改成其他的格式；艺术家对衬垫和齿条的欣赏；我们对除法的日渐熟悉和对除法得到的余数的关心。在17世纪早期，人们才不太认真地开始考虑这样的概念。所讨论的曲线由一些方程式或公式表达出来。为了方便，我将用我们现代的叙述方法和现代的符号来说明一个函数 f (x) 的曲线图，并且我使用二次方的函数作为示例的模型， $f(x)=x^2$ 。我希望能求得这个曲线上某点P的斜率。



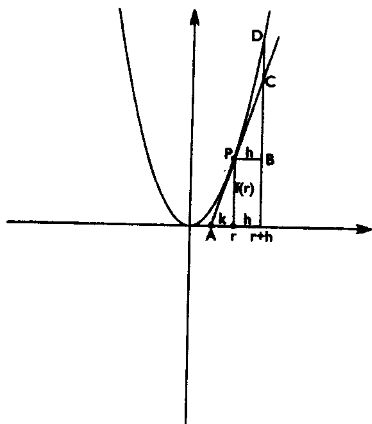
曲线上的点P在x轴上的投影记做r点：距离原点为r的点。当r代入函数 $f(x)=x^2$ 时，r点上部P点的高度和函数的值相同（它的路径就是曲线)：在我们的这个例子中，P点的高度为 f (r) ，也就是r^2。如果现在我们画出从r到P的直线，它的长就是 f (r) 。我们现在有P点的两个坐标值：水平坐标r，垂直坐标 f (r)（在我们的例子中，是r和r^2)。

因为切线是一条直线，两个点可以确定它。我们知道P点是其中之一。如果我们知道切线在哪里与x轴相交——我们称那个点为A，我们将知到从A到r的线段长度（这个长度用k来表示），因此我们知道比率f (r)/k，这就是曲线在P点处的切线的斜率，也就是我们想要的斜率。





注意到f (r)和k是直角三角形的两个直角边，直角三角形的斜边AP是我们切线的一部分。这里就是魔法开始的地方。在x轴上r点的右边取任意一点，距离r点为h——因此这点在x轴上的坐标就是r+h，并从该点垂直地画一条直线，交切线于C点，交曲线于D点。接着从点P画水平线与这条新的垂线相交于B点。显然线段PB的长度也是h。



我们不知道C点的y轴坐标，但是我们知道B点的y轴坐标和P点的y轴坐标相同，为f(r)；并且D点的y轴坐标为f(r+h)。

在我们的例子中，

$$f(r+h)=(r+h)^2$$

就是：

$$r^2+2rh+h^2$$

我们为什么画出如此复杂的新图形呢？因为在这个图形中三角形PBC相似于三角形ArP，它们的边的比率 $\frac{f(r)}{k}$ 是我们想要知道的。

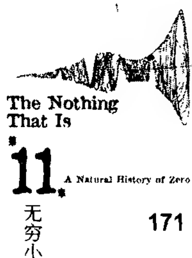
现在我们知道，相似三角形早在欧几里得（Euclid）以前就是几何学者的惯用手段，并且他们知道对应边的比率相等。因此，在这个例子中 $\frac{BC}{h}=\frac{f(r)}{k}$，因此如果我们仅仅知道BC的长度就可以求得结果。但是，很显然我们不知道。然而我们又确实知道BD的长度：它是从x轴向上整个线段的长度f(r+h) 减去从x轴到B的长度f(r)。简而言之，它是：

$$f(r+h)-f(r)。$$

就这样做可以吗？不，因为C点不是D点。但是我们可以看到，我们想要的比率 $\frac{f(r)}{k}$ 和 $\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$ 差不多。因此，如果我们让点r+h缓慢地向左滑动——缩短h，这样我们可以看到，垂直的直线将和它一起移动，仔细观察一下，你会发现：CD的长度将变得越来越小，直到最后消失！三角形PBC和图形PBD将变得完全相同。

但是这里的魔法陷入了严重的麻烦。我们已经将h缩短到足够消失。那将使h=0：并且你知道我们不能用零去做除数。

数学使思想变得敏锐起来。让我们仅仅考虑我们现在使用的例子，也就是我们使用的平方函数，希望能从



这个函数上找到一个解决的方法。在这个特殊的例子中，比率：

$$\frac{f(r+h)-f(r)}{h}$$

就是：

$$\frac{(r+h)^2-r^2}{h}$$

因为我们不能让处于分母位置的h值为0，让我们运算分子上的平方差，并把我们得到的式子分解为相乘的式子。我们得到：

$$\frac{r^2+2rh+h^2-r^2}{h}$$

消掉r^2和$-r^2$，我们就得到：

$$\frac{2rh+h^2}{h}$$

现在，现在看运气怎么样呢。如果我们把分子中的公因数h提出来得到：

$$\frac{h(2r+h)}{h}$$

奇迹出现了！分子的h和分母中的h可以消掉，剩下的仅仅是：

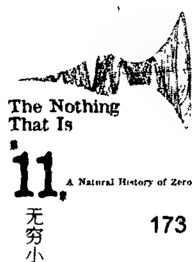
$$2r+h$$

现在让h缩小到0（费马这么评价，对于一个点来说就是："消灭它。"），那么留给你的就是2r。2r就是是$f(x)=x^2$在点（r，r^2）的切线的斜率。因此，例如，在点（3，9）处的切线的斜率是$2\times3=6$。尝试一下：你会发现你的测试确认了我们的结果。如果你感到有兴趣，尝试说明$f(x)=x^3$在点（r，r^3）处的斜率是$3r^2$。

这是十分绝妙的和具有革命意义的——这也是非常有争议的。在适当的时刻，我们是否可以真的用0去除呢？我们能否搞清楚我们所进行的移动和缩小的操作，以及一个三角形最终竟等同于曲线形边呢？而且这一切到底意味着什么呢？

从17世纪晚期开始，为了解决这些问题出现了肯定、

异议和反证的不同观点。这种情况延续了150年，从客气地辩论演化到几乎相互仇视地争吵，最终这一切形成并归结于无穷小的知识和术语，这个争吵才算告一段落。如果聪明的同胞们如果知道很多个多构成的依然只是很多，如果仅仅只有看不见的鬼怪和很少一部分神话传说中的超人才有超越我们的力量存在，如果较少从相对的角度来说可以说成是较多——那么为什么最少不能相对说成是最多呢？为什么这里不引用相同的比喻手法并重新认为零是某物存在的微小量呢？这就是在17世纪被一个接一个的数学家分别引用的方法，这种想法却又被我们熟知的运动规律弄得前途未卜。无论是从数学上还是从人类本身来看，这段史话太复杂以至于什么事情都不能做，只能在这里肤浅地叙述它。依照爱默生（Emerson）的建议，在薄冰上溜冰，速度是你的助手。因此，只要我愿意，我不会仅仅望着远方模糊的东西而冒着把闪闪发光的结论撇在远处的危险，从而偏离了通往它们的路径。



随着h变得很小时，曲线和它的切线变得愈来愈接近。毫无疑问，这是每一个人都赞成的观点。问题的关键在于“很小”和零有什么区别（你可以用“很小”去做除数，但不可以用零去做除数）。对一些人来说，这个“很小”可以成为极其微小的物质来填补另两个极其微小物之间的间隙；对其他人来说，这个变化中的微小量又可以成为激活静态景象的运动。

在刚才操作中（事实上我们始终把三角形PBC叫做“巴罗微分三角形”)。艾萨克·牛顿（Isaac Newton）的老师艾萨克·巴罗（Isaac Barrow）用几何学方法证明并得出这样的结论，当三角形PBC“足够小时”，它可以安全地等同于PBD。他说，几何方法可以“免除讨厌烦琐的计算负担”。这是一个生动的评论，因为计算开始于在

一个板上移动小圆石，这里正在发展的微积分学将超越那个小圆石的概念：不可再小的圆石——理想状态的沙子颗粒的运动。

然而如何搞清“足够小”的意思呢？一些人说，你想多小就可以多小，把负担推卸给批评家；“不确定的”和“确定的”小，而另一些人说，可以把它还原为认为由原子组成的世界，从而确定它的小。但是两个点相距一个极小量仍然可以说它们是不同的，而且我们想要求的曲线的斜率不是接近P点而是就在P点。

由此，在倡导“极小量”的概念的那些人中，又一个解决这个问题的手段发展起来：微分量是可以小于任何你指定的数量；或者当与它较大的相邻项比较时［当我们展开$(r+h)^2$并得到$r^2+2rh+h^2$，当h变小时我们可以忽略h^2，因为h^2变小得更快，很小量可以被忽略］。1691年，约翰·伯努利（Johann Bernoulli）说：“假如把一个数量看做天文距离，而无限小量就像你在显微镜下看到的微生物。”——因此“一个数量减小或者增加一个无限小量，数量大小可以看做没有发生任何变化”。

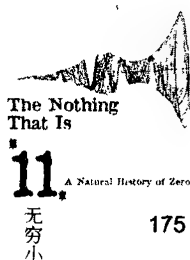
这让人想起弗莱恩·欧卜森（Flann O’Brien）在他的惊险小说《第三个警察》（The Third Policeman）中，由警官麦克鲁斯肯制造的逐渐缩小的柜子的情景：

> “6年前，它们开始变得不可见，玻璃的或不是玻璃的。没有人曾经看到我制作的最后5个，因为没有玻璃足够坚固可以用来把它们做得足够大，像曾经做过的最小的东西那样真实。没有人能看到我在制造它们，因为我的小工具也是看不到。我正在制作的这个几乎小得和不存在差不多。第一个柜子以容纳它们100万个之多，

并且，如果将它们堆积起来，还有剩余的空间
可以存放一双女人的马裤。也许只有神仙知道
它在哪里停下并结束。”

“这个工作一定很费眼睛。”我说。

一口气追溯到至少是梅斯特·埃克哈特（Meister Eckhart，1260?~1327? 德国神学家，被认为是德国神秘主义的创始人。他的著作影响很大，内容主要是关于个人灵魂与神的统一——译者注）时代，无穷小的概念是等价于没有，如果要我们相信他的翻译者：“……（对）埃克哈特而言，在无常的人类和永恒的上帝之间的差别可以随心所欲地变小。”无穷小仍然和我们在一起，如果在银行的出纳员，他通过每天从许多客户的账目中汇集几乎没有价值的千分之一进入他自己的账户就能富裕起来。如果一个曲棍球守门员在7次比赛中6次使对手不能得分，并且在持续整个冬季的赛季中有3小时51分54秒保持不被对手破门，他就将被赞誉为零先生，就像弗兰克·布里姆塞克（Frank Brimsek），这位1938年所向披靡的波士顿熊队的队员就被称为零先生。



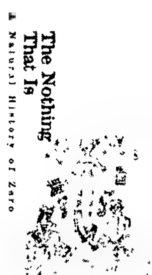
一位伟人从这些被极小量说服的人中脱颖而出：高特瑞德·威廉·莱布尼茨（Gottfried Wilhelm Leibniz），1646年出生，德国外交官、律师、语言学家、哲学家、历史学家、地质学家和微积分学的创始人之一。即使当一个三角形的那些边消失时，他还不时说到三角形边的斜率依然存在；他时常从他的计算中删除可以忽略的小项。他称dx为“无限接近”的两点之间在x值上的微分，但是也将它描述为一个“初始的量”。他说，他的零不是绝对的而是相对的。另一方面，他谈到它们作为正式的工具时，也具有同样的能力，就像虚数在代数中成功地

运用一样。

如果想更深地理解这个概念，你必须求助于他的哲学来认真谈论这个dx是什么：答案令人震惊。莱布尼茨主张宇宙的最终要素不能被合成——如果是合成的，它们就不是最终的：你可以将它们分解成更简单的部分。但是在时间的任意时刻，空间的任意点总是可以被细分，至少在观念上可以。然而，我们每个人确实知道一个不可分割的最终的实体存在：也就是，本身。他称为“单子”（**莱布尼茨学说中认为是构成物质世界存在的最基本的和不可分的单位——译者注**）的这些点是概念上的或形而上学的点，你在你的内部，我在我的内部——或者更确切地说，我们每个人是一个单子。当你想到你的朴实、无亲无友的本身：纯洁的内涵，这时你能感觉到他是什么意思。也许这就是他为什么说单子“没有窗户可以打开”的原因。对莱布尼茨来说，不可见的单独个体就是真实存在的单子——并且通常的单子只能靠想像。



莱布尼茨



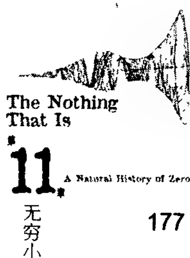
dx可以看做是数学上无穷小单位的吗？像莱布尼茨所说的单子一样，它也是活动的，不是呆滞的，每一个都作用于世界，动态成分大于静态成分。他更进一步指出，可以称数学上的点是他的单子的“观察点”。对他而言，可见的空间世界实质上是不可见结构的单子“平移”形成的。在我看来，单子是dx的后映像或它广延后的概念。更进一步可以这么说，在莱布尼茨致力于发明基本原理的概念中，dx也许已经代表了“单子”。

一个如此形而上学的观点——这其中，零已经已经进入我们每个人的内心世界，是怎样引出一个充分描述并预测外部世界的数学呢？莱布尼茨会说，因为事物事先建立起了和谐的关系。然而，那些坚持运动只能根据运动来理解的人们与他的立场迥异：一个无论多么小的微粒，都不是世界的本质，而变化本身才是世界的本质。另一个微积分的创始人，艾萨克·牛顿远远地盯着这个问题。



牛顿

根据传统的说法，他是理性时代（Age of Reason）的第一个思想家。约翰·梅纳德·凯恩斯（John Maynard Keynes）读完了牛顿收藏的论文，对牛顿顿时肃然起敬，称他绝对是世上的最后一个魔法师，他高深莫测的本能，他的不可思议的目标——揭开上帝藏在布满星星的天空中的宇宙秘密。作为莱布尼茨的对手，他不过是一个活的单子，神秘的、内在的——并且只有最窄的和最稀少的窗口可以通向他的著作。



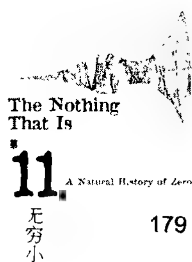
1665年，当牛顿20多岁时，瘟疫席卷了伦敦和他所在的剑桥大学。他将自己藏在自己家的农舍内并开始解决运动的秘密。后来他说这确实是他一生中收获最大的两年。像他的老师巴罗借用无穷小量来考虑问题一样，他从一个精明的苏格兰人詹姆士·格雷戈里（James Gregory）那里引进符号“o”。因为他使用这个“o”的方法和前几页我们使用h一样——用它来加、乘、除，所以，当你甚至在比的分母中也看到他用o时是多么可怕呀！

一旦回到他在三一学院的房间［具有讽刺意味的，他是一个秘密的惟一神教派（**基督教的一派，认为上帝系单一者，反对三位一体的说法——译者注**）的信徒］。在那里天文和炼金术的工具、他的透镜、曲颈瓶、炼丹书和计算工具凌乱地摆放在房间里面，他轻微地但是有决定意义地改变着自己的思想。（他信奉惟一神教，住在神学院，却做着与教义相悖的事情）。他也做着我们以前已经看到的可以做的事情：从他的等式中删除（或者像他说的那样，可以使用“擦去”这个词）可以忽略的小项；但是他逐渐意识到这些无穷小不是空间上的无穷小量而是时间上的无穷小点，他称它们为“瞬间”。从不可分割的单子学说中去除粗糙的东西，在这一方法的指导下，一个运动的观点慢慢形成了。这个过程是连续发生的呢，还是一眨眼工夫就发生的呢？我们现在可以考虑的就是这些小点。

最后一个问题是令人震惊的：他拒绝忽略涉及o的项，因为“在数学中”，他说，“最小的误差都不应该忽略。”然而取而代之的是他忽略了整个无穷小量这个概念，包括空间的和时间的：“我将数学上的量作为一个连续的运动来描述，而不是作为很小部分的累积来考虑。”实际上，曲线是由连续运动的点形成的：“这些现象必然真实地发生，并且在物体的运动中每时每刻都可以看到。”他以前为变量（variable）［“变数（fluent）”］和它的变化量（change）［“微分（fluxion）”］发明的名字现在盛行起来，随后像他的x'和y'一样也很盛行。“巴罗微分三角形”变成“无限小的”。错误在确凿的证据前会再也站不住脚。牛顿追寻的是事物如何作用而非事物是什么，他对此的坚持执著，不亚于对将运动作为自然界基本原理的坚持。

无论如何，这里两个微积分的不同学派，是从一直追寻把零想像为一个物体还是一个运动作用之间的对抗中成熟起来的。就像伊萨克·迪内森（Isak Dinesen）爱情故事中的恋人，他们被锁在不同的屋子中，每个人拿着对方的钥匙。

每一方都不能用希腊数学中建立的阐述标准来测试它的过程。相反的，他们在自己内部也有分歧并被各方面的批评袭击。你还想从声名狼藉的任性的少数人中获得什么呢？德语中的o'是一个错误的向导，因为它经常致使旅行者迷路。伯纳德·尼温梯基德（Bernard Nieuwentijdt）是荷兰的一个内科医师，1694年他这么写道，他不能理解无穷小和零之间的差别，或者无穷小的和又如何能达到有限。他说，这些方法同时导致了正确的和荒谬的结果：矛盾不断地出现，在这个地方拒绝无穷小量而在那个地方却不拒绝。在他有名的小册子《分析家》（*The Analyst*）中，伯克利主教在1734年说这些无限小的增量"……既不是有限的数量也不是无限的量，当然也不是零。我们可不可以称它们为离散数量的幽灵呢"？并且他问："在没有仔细考虑目标和周密计划的前提下，人们能够按照科学的方法继续前行吗？



从结论来证明问题已经得到正确的解决，这种证明方法被认为是确实可行的（如果这些权宜之计很见效），严密不是数学而是哲学应该关心的事情，优美比理性更能打动人心；优美胜于合理（另外，这些自相矛盾的话像基督教中的告诫一样有用）。法国数学家达朗贝尔（d'Alembert，1717~1783，**法国数学家及哲学家，他定义了保持均衡和离心力的力学定律——译者注**）说："只管前进而信念就会随之而来。"反正证据有时本身就可以作为证据，有时又可能使证据变得不那么直接。因此，

前所未有的天才，布莱斯·帕斯卡（Blaise Pascal），在处理这些问题的过程中只运用技巧而不去考虑逻辑问题。你会看到解决问题的过程是由技巧组成的，精练的技巧胜于详细的阐述。另一方面，莱布尼茨十分小心谨慎地回击尼温梯基德的挑战。然而不管怎么说，这些让人感到麻烦的细小微分线段就是他解决问题的本质技巧。

不使用罗盘和地图，靠感觉摸索前进，想到达前人从未到过的地方，这些人是真正的探险家。在他们的想像中，他们所在的区域有无限多不可见的极细的线可以用来确定他们的位置，或者去除大量的细线，仅保留它在想像中的形式，这些都是从内心来的信息，他们的能力既使世人感到震惊又使人感到安慰（可以不为他们的冒险担心）。牛顿告诉他的一个朋友："在数学上，我努力使它变得难懂，避免那些一知半解的人来减弱数学的魅力。"



直到19世纪中期，一种使人满意的理解方法在法国和德国发展起来——一个使人想到詹姆士·瓦特（James Watt）使用旧硬币的方法。他曾经在他的口袋中装着旧硬币，来随时检验活塞和他的蒸汽机上的气缸的配合程度是否合适：必要的缝隙必须小于他口袋里的六便士的厚度。

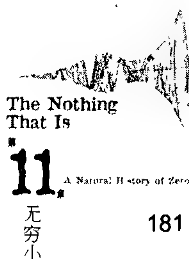
这个方法是工程师很容易实现的：给定一个公差范围，想办法实现和检验是否满足公差的要求。无论你坚持它们有多么地接近一个数值，一个逐渐缩小的数列的和（例如我们收缩的三角形的边的比率）有一个确定的极限值，通过指定某项或者它以后的任何一项，我都能向你说明它们确实是靠近或者更加地靠近这个极限。1是 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots\cdots$ 的极限吗？是的，如果我能说明这个和可以任意地接近1。在百分之一范围内，只要将前面

7项加起来，你将发现这个级数的和仅仅比1少$\frac{1}{128}$。千分之一范围内呢？同样如此：前10项加起来的和是$\frac{1023}{1024}$，这个级数的和接近1的程度比千分之一还要小。

几个世纪以来，人们一直在制定这方面标准。无数的学生努力掌握微积分的知识，而相当多的老师回避这个精确度上的问题。竭尽所能地追求准确，提高技巧，这让我们想起了德国和美国之间开展竞争的一个故事。在第一次世界大战后期，一个美国制造商给德国的一个竞争对手寄去了一个经过非常精细拉拔的电线，这是他们国家可以引以自豪的象征——他们可以做到很精细的电线。可是，强中更有强中手，这根电线被寄回来的时候，德国人在这个细线中打了一个完美的孔！

在老的极限概念中，无限靠近和有条不紊地靠近是其中的主要概念：一系列的数字慢慢靠近一个固定的数字［在我们的例子中$f(x)=x^2$，6是那些很接近点（3，9）的切线的斜率的极限］。减小必须是连续的：它不能有跳跃或者在通向这个目标时有间隔存在，并且你必须能够从两边中的任意一边趋向这个极限还能得到同样的结果（如果一个上升的山在一个悬崖处结束，就没有意义去讨论悬崖边的斜率了）。一旦我们注意了这些学术上的细节，并且我们有了表示它们的方便的符号系统，神秘感（也许还有一点魔力）就会从光滑曲线的斜率中消失。

一个过程（例如这个h缩小到0）在被严格论证之前就一直在数学中应用：从阿基米德开始，这种方法一再地被使用，因为它来源于直觉却可以被正确的结果证明，你可能已经猜到，这种过程绝不是仅仅使用了一次。在所有的数学思想中有两个支柱，第一个就是思维的自由想像：我们观察大量的现象，然后从中发明出一些表达



的方法，这些表达方法可以完美地表述它们之间的关系，同时和其他的抽象发明不产生矛盾，还能使它们周围的事物变得很清晰，世界上的事物也就可以完美地和思维的描述符合起来，顺应事物独一无二的行为。

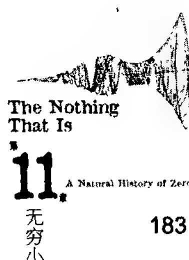
描述事物的方法发明完成之后，第二个行动开始了——从观察令人赞美的现象到能够证明思维能很好描述这种现象、这种过程。这种描述集中在仔细、巧妙的考虑上，这样的考虑需要有几个指导法则，从中抽出它们的本质问题，从最简单的公理出发，使那些结论被世人认可（一个或两个合理的假设可以用这种直觉的方法提出来，它来源于直觉又可以被正确的结果证明。但是一旦这两个最基本假设的推动作用结束，它们的影响将减小到零）。这样做导致了什么结果？只有在允许一定的误差范围和模糊的概念条件下我们的结论才是正确的，才能理解那些遥远的地方发生的事情和未来时间内将要发生的事情。

现在，我们正在使数学的很多深刻的概念变得统一起来（我们只能在20世纪逐渐看到这种统一）。我们正在重新开展这样的工作，在这个工作中，我们使用的语言并不是惟一的：它可以用很多本质上相同而描述不同的方法来解决（像那些可以自己组装的机器人玩具，一会儿是带机关枪眼睛的鳄鱼，过一会儿重新组装成圆滑的男管家，所有这些都可以用一个或两个螺钉在操作手册的帮助下完成）。这就意味着我们不能从多数模型中挑选出这样一个模型和只有一个存在方式的事物：用一句不负责任的话说，我们甚至可以得出这样的结论，事物可能根本不存在惟一的模式。我们思想的相对化甚至比多数后现代主义者走得还要远。

也许我们统一化的方法是有缺陷的。这种方法限制

性太大，一旦掉进了它自己相对化了的陷阱，就可能是众多方法中惟一合法的一个，因此另一个最好假定为有所区别的复制品。尽管“复制品”意味着原物与它的复制品有着原始的区别，但是我们在这里不能做出区分。满足形式系统的这些模型中每一个都不相同，但都相当于我们的模型。许多模型都在出现，每一个模型看起来都有它的可取之处。

我们需要承认丰富的形式系统必将给予我们的巨大好处。它们排除错误的结论并符合我们的公理，我们还可以把它们翻译成可以理解的语言。在这里，新的语言结构可以结合，这样有益于进一步理解结论的形式。你甚至可以继续宣称它的不明确是良性的，因为一个系统无法表达的内容或许另一个系统可以很容易地表达出来，这很像一个使几何学家为难的问题可能会轻易地被代数学家解决。



我们还必须承认这个系统的伪装在阻止我们寻求事物存在方式的惟一性。事物惟一性的意义大部分来自于数学。那些获得结论的方法我们无法而且实际上也很难掌握，并且它们天生不能被形式化。对伯克利主教质问的回答，事实上，我们在开始的时候回答得很好。这个时候我们的目标、对象和方法还不是很成熟，我们还在为确定问题的范围浪费时间：事物存在方式的惟一性应该仅仅属于人们刚刚认识它的时候，随着人们对事物认识的不断增加，我们当然不有期望它能经受起以后的严酷时光而幸存下来。世界可能不是仅仅比我们想像的异常，它有可能比我们能够想像的更异常。

两个胜利，一个失败和遥远的雷声

和微积分一块出现的不仅仅是一个可以掌握并控制

变化的方法，还有一种新的解决重要问题的思想。或者说这种思想并不是新的，我们仅仅是重新更新了这个思想，而这个思想已经等了很长的时间来复兴。一个变化模糊的概念，就是我们最初私下讨论复式簿记转换时听到的，此时在沿着一条曲线的切线滑行中嗡嗡作响。这个声音来自概念“极限”：一个作用（缩小的过程）指向一个目标（这个极限）——但是这个作用和目标的组成都是数字。只要现在用等式符号标出这个模糊概念，我们可以像例行公事地前进，就像进行和存在是相同的。极限必然伴随着一个逼近过程，揭示它的形式：“A像B”中的B用来解释A。牛顿必须是最后一个魔术师，因为在他之后，已知的知识不再用来解释未知的东西，而是用来（这种解释方法可能会花费伟人很大的努力来揭示它）解释自己。



微积分的宫殿摇摇欲坠，甚至一些最基本的问题都出现了漏洞，研究微积分的人们不得不加固这些基本的问题来托起这个伟大的宫殿。从微积分出发，自然世界的一个又一个领域都试图用微积分理论来解释：光学、流体力学、机械学，还有更远的，生物学、经济学——所有的科学，理论的或者应用的。甚至我们的一个老谜团也由它的力量解决：因为这是我们对数字理解的一次革命，这次革命给不确定的$\frac{0}{0}$一个明确的意义。

我们这里的故事有一点欺骗。17世纪晚期的一个人——我们应该叫他纪尧姆·弗朗西斯·安东尼·洛必达（Guillaume François Antoine de l'Hôpital）侯爵，考虑两个连续变化的函数，f(x)和g(x)［例如$f(x)=2x$和$g(x)=3x$］。它们的比率对于差不多任何x都有意义。在我们例子中，如果$x=17$，那么$f(17)=2\times 7=34$，而$g(17)=3\times 17=51$，因此$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{34}{51}=\frac{2}{3}$。对于你选择的几乎任意其

他x，它都是2/3。几乎任意——但是不包括x=0，因为那样我们将得到 $\frac{f(0)}{g(0)}=\frac{2\times0}{3\times0}=\frac{0}{0}$，这家伙是我们的老敌人。

然而，需要注意的是：如果这两个函数中的每一个函数在临界位置（我们的例子中，就是在x=0）都独立有一个斜率——并且如果g(x)的斜率在那里不是零，那么它们斜率的比值就和这些函数自己的比值相等了！

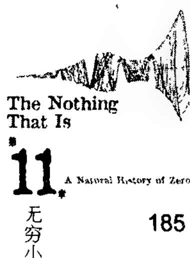
把这个过程放进极限的语言中来看我们的例子：因为，当x接近0时，f(x)和g(x)的极限都是0（当x接近0时2x和3x都接近0），并且因为f(x)=2x的斜率处处都是2而g(x)=3x的斜率处处是3；当x接近0时，$\frac{f(x)}{g(x)}$的极限等于它们在（0，0）点的斜率的比值：这里就是2/3。一个函数斜率的速记法是在它右上角处打一个小的垂直'（老的希腊用法的影子）——因此f'(x)表示f(x) 在变量x处的斜率。那么我们将这个新发现简写为炼金术（化学式）的形式（用“lim”代表极限）。

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

换言之，$\frac{0}{0}$是一个假象——在这个例子中，是$\frac{2}{3}$。

侯爵因为这个基本原则的发现而名垂千古，到现在这个发现还沿用洛必达法则这个名字。涉及我们历史的惟一问题——那就是我在开始告诉你们这个故事时有一点欺骗的原因，是侯爵先生既没有得出这个结论也没有证明这个问题。两者都是他的老师的杰作，约翰·伯努利（Johann Bernoulli），他显然甘心拿侯爵的利而放弃名。从此人们记住的是“洛必达法则”而不是“伯努利法则”，我甚至怀疑历史是否有公平可言。

记住，$\frac{0}{0}$的投降是有条件的：仅仅是当斜率存在的情况下，它们的比率才有意义。否则，在我们成熟的数字世界，用零去除永远不可能。这不是把我们带回零本



身是有问题的时代——除非你生活在宾夕法尼亚州。因为在1998年5月，中心县的委员们投票决定废除一项关于全部用零评估的税收计划。因为这让当地学校减少了收入，他们通过他们的律师控告县政府，声称零不是一个值。他的证据是县里的估税员试图在他的便携计算器上用零去除。只有表示“错误”的“E”出现。

对于我们余下的人，零到底是不是一个值。不管它是否是过程胜于目标，它是我们通过这些篇章一直追求的“难捉摸的她”。但是你能用零计算吗？这一定相当难以捉摸，因为科学作家迪克·特雷西（Dick Teresi）最近向麻省理工学院咨询，询问数学系人员的正是这个问题。当这个问题在走廊中回响时，他一直手持电话，直到最后回话说没有人能够真正明确地回答。总之，他们仅仅对1972年以后发明的数字感兴趣，因此他最好咨询一下哈佛大学。



另外一个问题，已经等待革命性的东西来回答它：0^0是0还是1或者是其他值的问题。从我们的新观点出发，我们能够巧妙地归纳出什么导致我们的这两个猜想。首先我们看这个极限，当x缩小到0，就是求x^0的极限，我们相信答案必定是1：

$$\lim_{x \to 0} x^0 = 1$$

更准确地说，逼近是从大数字到小数字的：当x接近0时，我们从右边取极限，并且我们用书写表示：$x \to 0^+$。因此我们的结论是：

$$\lim_{x \to 0^+} x^0 = 1$$

我们求0^x的极限（这次也是当x从右边接近0），并且这次，通过明智的例证，它应该是0：

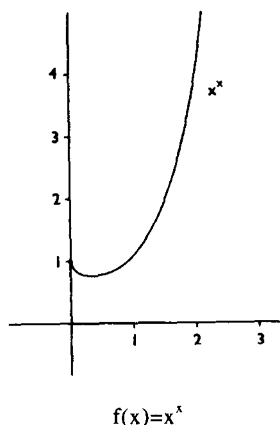
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 0$$

从表面上看每一个方法得到的结果似乎都是对的，但是其中至少一个必须是错误的。

也许差别存在于结构的不对称性：一个底数是变量，另一个是指数是变量。为什么不让二者同时变化，并在x从右边接近0时取x^x的极限呢？通过灵活技巧的应用（我们应该称它为什么，伯努利法则？），我们找到了一个明确的答案：

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = 1!$$

不用纯代数的方法演绎，让我展示函数$f(x)=x^x$的一个图像：

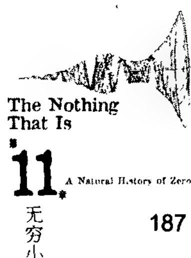


$f(x)=x^x$

当沿x轴从右边向0移动时，你可以充分肯定曲线从凹处升起并接近1。

但是还要保持镇静，不要得意忘形。你应该记得，几页前，我说一个极限必须从任一方向逼近所得的值相等时才有意义——而在这里我们看起来在我描述的“悬崖”处确实有一个上升的斜坡突然结束。

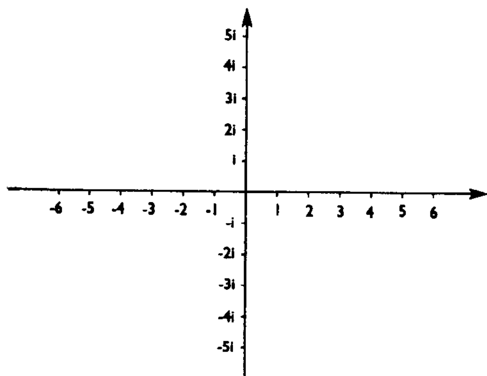
好，你说，只要完成y轴左边的图像，将负值代入x^x，并通过它们向x=0接近，我们应该就可以知道这个极限了。我希望我能这么做。然而，我们在这样做的过程中遇到



了4个难题使我们不能如愿。第一，当采取我们的方法时其中必须没有间断：我们的图像必须是连续的。但是（第二和第三）当你试图代入$x=-1/2$时，看看发生了什么，例如，代入函数$f(x)=x^x$。意思就是（当我们正在款待天使时看到的）：

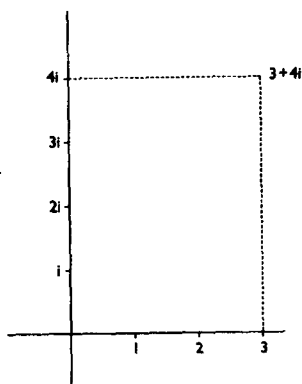
$$\frac{1}{\sqrt{-\frac{1}{2}}}$$

因为指数1/2代表取平方根，并且它的负号迫使我们将结果放在分母位置。如果它是实数，它在那里没有妨碍——但是$\sqrt{-\frac{1}{2}}$是什么呢？它是虚数；而这第四个难题意味着我们必须停止一下，并且我们被从实数甩到更宽广更复杂的，也包含虚数的坐标平面内：那些数，像$\sqrt{-1}$用字母i表示，你在实数中是找不到它的，但是你可以想像它在一根虚数轴上，且这根虚数轴垂直于实数轴。



综合坐标平面

这样在这个坐标系中，我们就可以描绘任何实数加虚数的组合，例如3+4i，用一个平面上合适的纵横坐标表示[在这个例子中，(3，4)——像下一个图表中显示的那样]。

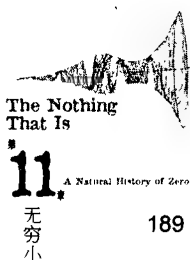


复合坐标平面上的点3+4i

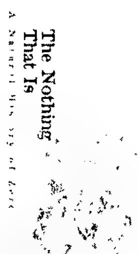
我们想通过慢慢地朝0逼近找出0^0是什么。但是既然我们是在一个平面而不是一条直线上讨论问题，我们就必须确信我们能够从任何方向接近0^0。到目前为止我们已经命名我们的函数$f(x)=x^x$，因为变量x表示任意实数。为了强调这些“复数”由实数（x）和虚数（yi）部分组成，让我们改变变量的名称为z，这里的z=x+yi。我们看看当z接近0时，$f(z)=z^z$发生了什么变化——也就是说，当x和y都接近0，函数f(z)的变化情况。

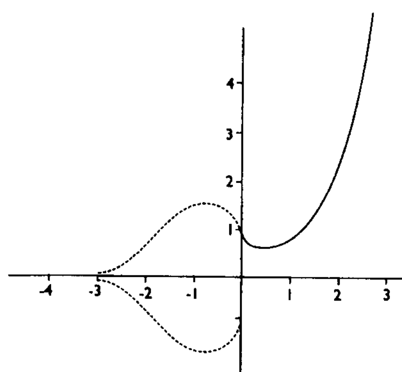
发生的事情极其奇怪。无论我们沿那条路线接近（0，0），函数的值都陷于混乱。它们可以得到任何一个数字，越接近0这种情况就越混乱。它们从来不稳定，从来不趋向于任何特定的值（1或0）。z^z在（0，0）点的极限简直是世界上最大的噩梦。说它在那里无论取什么值都没有意义，这也许是一个不太谨慎的说法。

也许我们正在走向失败，但是我们会尝试任何一种可能去解决问题。其中有这样一种情况发生，即使数平面左边象限存在一些特殊的点，这些点代入函数z^z后却可以得到实数的结果。像你想像的那样，这种情况是很复杂的：正像-2是-8的一个立方根，当x是一个分母上是奇

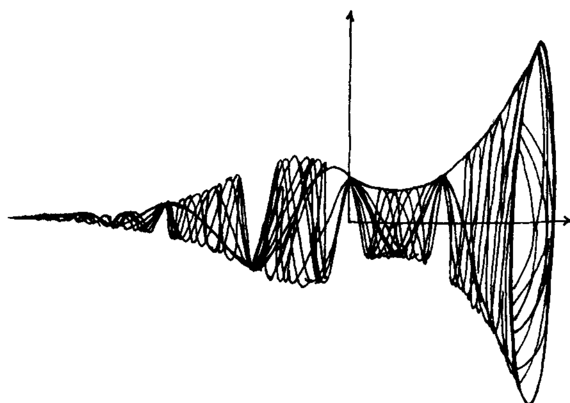


数的负有理数时，我们会在不同的地方得到实数结果。然而，对于任何其他的情况，我们都会得到多种的结果——例如两个平方根、3个立方根、4个四次方根甚至更多，在实数结果中又处处都存在着间隙。但是最终我们可以这样说：对于这些负的输入值，函数的图像是一圈又一圈的缠绕，它缠绕的结果使图像看起来像一个纺锤——因此在所有的这些混乱中我们还是能找到一些有规律的东西。





$f(x)=x^x$的完整函数图像



$f(x)=x^x$的纺锤

又有新的问题在“微风”中向你招手了：数学总是抑制不住地迫切要求归纳。如果函数$f(x)=x^x$有如此有趣

的现象，那么函数X^{x^x}怎么样，或者函数$X^{x^{x^x}}$会怎么样呢，或者越来越长的变量的变量的变量……的指数。慢慢地你发现自己爬上的就是巴别通天塔。可想而知，答案（重复应用洛必达法则可以得到答案）是具有讽刺意味的：当x从右边逼近0时，如果这个塔中的x值是奇数，那么这个极限是0，如果x是偶数，那么极限就是1了。

当然这些对解决0^0这个异常兴奋的“魔鬼”来说，没有丝毫作用：无论我们怎么企盼，怎么努力地去做，这复杂的世界都太令人惊讶了。但是思维总能创造出奇迹，并从我们进退两难的局面中找到解决问题的方法。任意给你一个多项式，它以一个常数项结束：

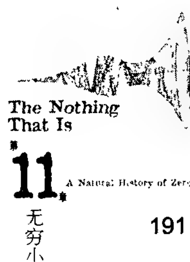
$$17x^3-8x+3$$

或者：

$$102x^{19}-14x^8+5x^5-7,$$

或者甚至是：

$$x^2+x$$



在它最后一项有一个默认的常数项0。

为了使计算更方便，那么按某种方式排列多项式中的每一项是非常必要的（当我们将多项式相乘时特别有用），将x的指数从最大逐渐递减来排列，并使变量每一个指数的项都存在。可是，在我们的第一个例子中x^2这一项在哪里呢？这一项是暗含在那里的，零又一次成为救星，就是把零作为系数。如果我们完整地写出它就是：

$$17x^3+0x^2-8x+3$$

而在每一个多项式的最后一项中变量在哪里呢？再一次，继续（按指数减小依次排列）使用零次幂，因为我们知道$x^0=1$。因此再次重新书写我们的例子就是：

$$17x^3+0x^2-8x+3x^0$$

最后一项无疑是3，并且必须保证对x的任何值都有意义——甚至x=0也应该有意义。因此，将常数看做x^0的系数，并规定无论x是什么都有$x^0=1$：甚至当x=0的时候，$0^0=1$。

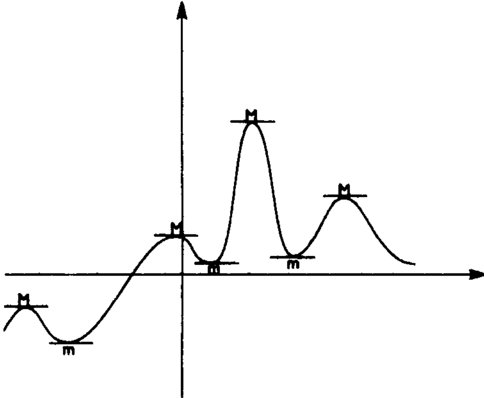
“规定”是为了推广这个符号并且应用：与将指数从自然数引申到0、负数和分数时候相比，我们有了更大的余地，这时我们发现我们不安起来。如果它们必须适合旧规定，那么，惟一的途径就是我们必须定义新的用法。现在，看起来在符号0^0中，两条路线的收敛性没有实质性的意义，并且我们可以根据语法或美观任意选择其中一条。

这挫伤了莱布尼茨（他对自己的符号是如此深思熟虑）等人怀有的希望，从形式化产生的新的语法结构应该符合原来的语言习惯才对。显然符号和讨论对象要能更灵活地结合才有利于问题的解决，并且我们要在需要和惯例之间取得一致。

胜利之后仍是失败，但这次失败却是有益的。在发展我们知识的时候，零给了我们最大的帮助。感谢微积分，在我们使用任何约定时，零处于支配地位并给我们带来了巨大的方便。同样，在理解事物的运动时零也处于支配地位，虽然这也许不是所有可能的语言中最好的一个，但在结构上它是最优的：在特定的环境中这是最好的。

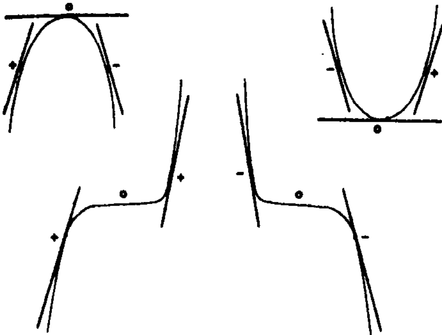
为什么说零是最关键的？因为“如果说什么也没有发生，那么它的意思就是说既没有最大值也没有最小值发生”，这是牛顿之后数十年，最伟大的数学家利昂哈德·欧拉（Leonhard Euler）指出的。阳光的照射、商品的价格、印度豹的行速、翼翅的形状、一片树叶、一场山洪、所有的交通安排、细小精致的修补，均可以看做是对一个最优化问题的解答。我们如何预测我们关注的过程在什么时候达到它的最值？如果给出一个连续变化

过程的函数，并画出它的曲线图，注意曲线的峰顶和谷底处的切线的斜率是——零！



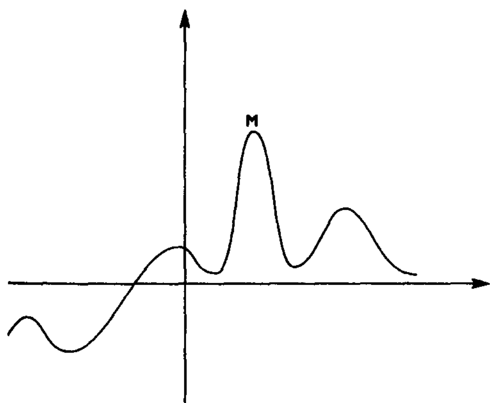
峰顶和波谷的水平切线

事实上我们甚至不需要画曲线图；我们可以从函数曲线上任意一点的斜率中导出一个函数：这个函数也就是我们以前叙述过的函数f'(x)。这个新的、导出的函数取零的地方，它的输入值就是f(x)取最大或最小值的数字。(决定它时需要注意一点：最大值出现在——从左到右，斜率从正变负处，最小值出现在从负到正的转折处。同样，当你平躺在礁石上，你可能会误以为你已经到达了山顶或谷底。也许表示这样一个零斜率的左边和右边的符号会让你有一点迷茫，不知道该如何确定它是正还是负。)



最大值、最小值和拐点

如果有几个极值点，我们通过比较原函数在这些点的取值，进而找到最大或最小值。



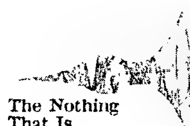
最大值

在零存在的情况下，也许你希望摇摆不定的值慢慢地重新达到一个极限。零作为被一个递减序列接近的极限，它是那么的遥远，似乎永远也达不到。在微积分中，零这个最基本的新概念像一个"害羞的角色"，几乎没有任何贡献：更确切地说，真实的零在变化过程中扮演的角色就像一个出席舞会的少女的女伴。如果你有这样的观点，所有工作和科学都是专门用来引出并解释它们所用的符号的，这个看法似乎一点也不夸张，因为如果欧拉是对的，这些符号确实就能指出世界的意义所在。

书写一个胜利者的历史是一件非常轻松和愉快的事情，只要展示必须展出的事件就可以了——人们慢慢地学会在计算中忽视极小量而不犯错误，将运动变化作为研究问题的基本观点，19世纪努力使极限概念合法化。这些努力使这些概念达到了完美，如果没有这些努力，我们也许仍旧陷在世界是存在于沙堆之上的形而上学的思考之中。然而我们又一次看到达芬奇潦草的笔迹在岁月留下的釉面上扩散开来：告诉我是否任何事情都很好

地完成了？因为我们总是处在战争之间，并且胜利都仅仅只是相对胜利。经过多年的轻视和忽略之后，当它的支持者对牛顿建立起来的完整的微积分体系进行攻击的时候，你可以再次听到无穷小量汇聚起的此起彼伏的巨大“声音”。

这些复兴的无穷小量停留在我们追寻的两个主题的交点：零是目标，而形式是正确性的保证。我曾经提到过，对问题新的、更深刻的理解可能来源于为了更加肯定我们的理解而创造的新的语言结构——并且大约50年前这项工作就开始了，这发生在来自德国的亚伯拉罕·罗宾逊（Abraham Robinson）的思想中，虽然他在加利福尼亚开着最新款式的红色赛车，但是他的思想却在一个极其不同的模型中穿梭：新近流行和强大起来的那些绝对的抽象概念使许多公理有了连贯性。



这个想法是这样的：举个例子，如果你想用一系列的控制来使钟表工作，当你试图建立这个控制的时候，你发现一个控制需要一个杠杆下降，而同时另一个控制却要求它上升，那么你会看到你的控制是相互矛盾的——它们之间的冲突意味着这样的模型不能建立。因此如果你能建立或发现一组控制的模型，那么这一组控制一定要相互协调才行。当然这个模型不需要用雪松木甚至轻木和棉纸来建立：它的组成部分可能全部是概念上的，它可以整合人的思维。回忆第10章结尾部分定义如何加和乘的公理：有理数、实数甚至任何一个我们定义的数字体系都是它们的一个模型，只要它有一个基本要素的数字元素。同一系列的公理可能有本质上不同的模型，这是个事实，这给罗宾逊提供了思考的线索。

他所做的就是建立一个公理的“非标准”模型，这些公理统治着微积分学（或分析学）。但是有一些很特殊

的数字：这些数字比零大，但比你能叫出的任何实数都小。这些几乎什么也没有的数就是他的无穷小量。利用它们，罗宾逊和其他人轻松地证明了所有传统定理和部分新定理，而19世纪愚笨的方法永远无法处理这些定理。他们恢复了莱布尼茨的荣誉，也纠正了我们在思考运动变化的一点偏差。

这是最终的胜利吗？斗争仍然激烈进行着，因为如果莱布尼茨的无穷小量是过去数量的幽灵，那么罗宾逊的看起来就是语言表达的而非数量的幽灵。这些无穷小量在正式逻辑的语言中的存在多于在世界上的存在，甚至在语言中，它们也更接近标点符号而不是字母、音符和单词。你可能回答说，我们现在看来十分平常的零刚开始出现的时候也是纯粹作为一个标点符号灵活使用的。确实，我们不能预测这些无穷小量将会如何发展进化。然而罗宾逊自己坚持认为这些无穷小量不是实数，而仅仅是非常实用的工具，并且提醒我们，莱布尼茨可能也会同意这个观点。特别的是，他声称自己没有发明新的事物，而仅仅是发明了“新的推理程序”。

好像你已经决定要把我们语言中的连接词［“和”(and)，“或”(or)“但是”(but)等等］也看做事物的名字，并且在被这些创造物丰富起来的世界中，你发现以前模糊的概念突然清晰了。你可能勉强地放弃这些洞察力，因为仅仅是一些不确定的中间物使这些概念清晰了。你可能甚至开始反复考虑“但是”和“或者”的原意，像它们代表的目标和过程的名称那样，这是存在的要求：信奉基督教的德国诗人摩根斯坦（Morgenstern）在1905年第一个从下面的诗中发现这样一个观点：

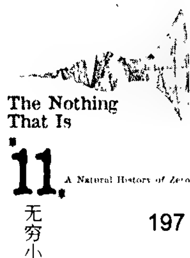
曾经有一个尖木桩围城的栅栏

栅栏上有间隔可以让你看到从“因此”（hence）到“从此”（thence）。

一个建筑师看到此景
某夜突然接近它，

消除掉栅栏上的间隔
并且用它们建造了一处住所。

无论你认为它的通风的围墙是由无穷小量还是由运动构成，自从发明微积分后，零居住的房子就远离了苏美尔人烘焙的泥土世界。再陈述我们引语中的问题已经没有意义了：零有多么靠近零？现在我们可以毫不畏缩地提出这问题。



第12章 它能超脱吗

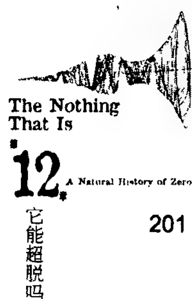
The Nothing That Is

A Natural History of Zero



大自然不喜欢真空，我们也是如此。在我们看来，零已经与我们的思想错综地交织在一起，但是时不时会产生一种让人们在思想之外的物理世界中寻找它的原型的诱惑，就像找寻喧闹绿洲之中一片沉寂的沙漠。我们也许会失望。地理大发现时期的地图制作者用风和蛇状焰火来填充他们地图上的空白处，并且改写处女地。像他们那样，“这里是妖怪”，天文学家在你认为没有事情正在发生和根本没有东西的地方，假定了能量的短期激增和准量子的瞬时爆炸。

就像我们最空旷的空间，因为充满了看不见的射线，所以是拥挤的（你仅仅需要打开适当的接收器——收音机、电视机，就能使它们出现），无数星星的光亮、来自宇宙大爆炸的背景声音、逐渐微弱的无数往事的回响在每一个地方相互交错延伸，使空荡的黑夜显得幽静恐怖。即使你不依能量而是依物质而言，并问：一定没有任何一个地方根本没有物质吗？你会从天文学家那里听到一个含糊的回答。理论显示而且测量结果间接证实了，空间本身是真空粒子的来源：数学是为了反映零的持续趋近和间断趋近之间的竞争。



因此当以太的传统理论居于主导地位时，你可能已经期望，在非此即彼的条件下，一个相反的假定已经出现。图书馆中没有人去的那个角落内收藏着写有过去理论的书，它们陈词滥调的脆弱的魅力仅仅会被它们曾经的故作权威所破坏。这里你会发现，在不显眼的角落，奥斯本·雷诺（Osborne Reynolds）所写的《宇宙观的转变》的缩写本。

这本书作于1903年，书的作者，一位英国工程学教授，对我们对他的解释深信不疑充满信心，他成功地获得了“从泰利斯（Thales，希腊“七贤”之一）到柏拉

图时代开始的这个理想所激起的最大的哲学兴趣”的评价。他自信的理由是他认为他的“观念的转变”完美地解释了基本的物理现象（光线的吸收、折射，重力等），并且“考虑到这些现象中没有一个曾经得到过机械的解释，它显得无限小”（一个零点模型），“对宇宙来说一定有另外一个结构可能满足同样的证据”。

他的解释是什么呢？宇宙不是真空的空间，而是充满了极其微小的颗粒（它们的直径是紫色光的波长的7000亿分之一），沿着很短的轨迹以大约每秒1/3英尺的相对速度相向移动。它们组成一个无限延伸的弹性的介质，它们的组合解释了我们所认识的一切事物。雷诺可能要问：“所有的事物是否都变得更加简单？”例如，他的理论解释了为什么在晴朗的夜间天空是黑色的：光线运动的能量消耗在加快微小颗粒相对运动的过程中。它将重力解释为微粒不再紧密结合的结果。它甚至解释我们是什么：宇宙中微粒组成的波。“……我们称之为物质的东西：是波。我们都是波。”

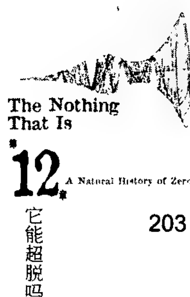


哦，阿基米德，这非常令人奇怪！你的罂粟种子在哪里，还有佛陀，你的微粒在阳光中跳舞，现在呢？真空在宇宙中消失——并且不仅仅是真空，还有奥斯本·雷诺。“在我手中有，”他写道，“第一个试验的模型宇宙，一个软橡皮袋……”并且有一张宇宙的照片（标记为W），号码是9，攥在一只从白色袖口伸出的手中，白色袖口连在黑色的袖子上。但是照片在肘部之前结束了。没有另外的东西。这是我从奥斯本·雷诺和他的宇宙之间得到的惟一一个相似点。

25年之后，当量子力学出现之后，又一次的观念转变认为带正电的粒子是所有难以探测的负粒子海洋中的孔洞。这是以狄拉克（P. A. M. Dirac）的名字命名的基

本波动方程的方法，方程从一些重要的后果出发描述电子如何运动（例如电子的负电荷增加，并在这个过程辐射出无穷的能量)。它是一个方法，像一个物理学家指出的那样，“非常杰出但缺乏可信性”，并且在负的环境中把正看做零，这肯定是有依据的。然而，当后来负能量的解释被重新考虑为一个不同粒子的正能量态时，狄拉克的负电子海洋重蹈了雷诺的覆辙。

现在，当我们理解它时，在空间最深处的冰冻大约是绝对零度以上2.7度，标志着那里存在粒子的运动。更多的（或更少的，因为更少的就是更多的）是：甚至一无所有的真空仍然是一个汹涌的能量海洋，这种能量以变化的电磁波形式存在，就像在没有负电荷的盘子上施加一个力所显示的一样［这个假想在1948年由荷兰物理学家亨德瑞克·科斯密尔（Hendrick Casimir）提出并于1996年在洛斯阿拉莫斯（Los Alamos）被最后证实］。根据现代理论，这种“真空能量”的数量是（令人烦恼地）无限大的，但是看起来只有少数飞碟中的人才能应用它。



如果我们在巨大的开放空间都不能找到空白，又怎么能在家中的狭小空间、钟形的玻璃容器间内找到呢？1670年英国化学家、炼金术士罗伯特·波义耳（Robert Boyle）——他和他的同事是自然哲学团体的发起人，他们将其称为“看不见的大学”，把一只鸟放进一个玻璃杯中并抽出空气。在100年后“德拜的约瑟夫·莱特”画中，你看到鸟在拍动翅膀，家中的小女孩转过脸悄悄哭泣，他的哥哥用滑轮吊起笼子，大人们或面面相觑，或看着试验或陷入沉思——只有仪器中有着光滑羽毛的鸟透过玻璃紧张怀疑地看着我们，而我们也死死地看着它。

“够了吗？”他似乎在问。是的，如果只是要杀死那

只鸟的话，够了。如果他想得到完全的真空，那还不够。一代代安静的、善于用新方法解决复杂问题的工作者们已经把我们带到离结果更近的地方。你不要指望在实验室外面的大街上遇到他们，对于他们来说，为了得到更为精确的完美结果，世界也消失了。他们以工作为生：威廉·费尔班克斯（William Fairbanks，长期以来都是近零研究者的元老）迎着寒风开着窗户睡觉，早晨时才弹掉被褥上面的积雪。

目前物理学家用激光来阻止铷原子在它的轨迹中湮灭，并在一个空的玻璃热容器中将原子超低温冷却，再开动一个磁触发器进一步冷却它们，直到绝对零度以上 $\frac{1}{10^8}$ 度的范围内。在这一温度下，这些原子成为一个整体；甚至当温度正好位于绝对零度时，令人惊奇的是它们的能量仍不为零。这是从量子力学得出来的，量子力学的核心是海森堡（Heisenberg）测不准原理，这个原理是说：当谈到电子时，你可以在任何时刻知道它在哪里或者它运动的速度是多少，但是速度和位置这两个值不能同时得到——但是你可以大胆地认为可以以摩诃毗罗的未知数原则为中心，并且这个几乎空无的微观宇宙同时也是真实的、虚幻的和无法描述的。

按照康德的理论，很明显我们可以假设没有物体的空间，但是不能假设没有空间的物体。但是就微观和宏观而言，现代物理学似乎已经证明我们不能认为实际的空间是真空的。难道它没有沿着银河系弯曲、没有成为微粒产生和消失的地方吗？根据我们对印度教中的空无的理解，难道它不是真空的而是充满物质的吗？

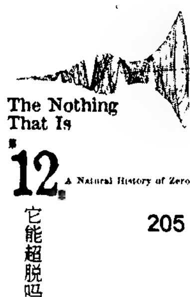
如果我们在那个范围之外寻找一个更简单、更纯粹的零，我们必须在不同的假设下寻找它。在特定微粒的集合中怎么样？一些物理学家深信提出一个光子团或一



个引力子团是有意义的，并且这些团是零——但是它不能够证明任何东西。

谈到零在时间上刻上的烙印：时间是所有事物中最适合“固定的移动者”的称号的。然而我们在这里很可能受挫：我们听到的值得庆祝的理论是关于宇宙大爆炸。对我们的耳朵和思想来说，10亿分之一秒后我们不能再感觉到它了。它或者不仅仅是一个瞬间——在宇宙诞生之前，有10亿年乃至无穷长的时间吧？

我们一直努力为之奋斗数十年的宇宙哲学理论陷入危机：反对的事实把它击碎，成了像纷繁的宇宙一样多的拼凑起来的假定，只是啤酒泡沫中的气泡而已。像约翰·科利尔（John Collier）的故事“魔鬼、乔治和罗斯”讲述的，它也许注定被一个消沉的名叫普赖尔的医学院学生击倒。不要担心，魔鬼说：“……在他的嘴唇碰到玻璃杯之前的时间将有两亿亿年，因为一个年轻的女人用她的目光牵绊住了他，当他喝的时候所有气泡都会消失……”



一些天文学家认为时间没有起点，一些则认为在虚幻的宇宙内部和外部对时间的认识是不同的，在更长的宇宙的循环时间中，一些天文学家把我们特定的虚幻时间看做线性的。而另一些人把宇宙大爆炸之“前”的时间描绘成没有前进方向的像空间一样的变化。人们将过时的理论重新整理，使之适合新观察到的现象，结果它们再次使你惊讶于语言和抽象的力量，因为时间看起来只不过是我们所有行为的一个条件，所以你想知道你必须站在什么角度上才能摆脱“横看成岭侧成峰”之感。时间，用来解释康德，是我们冒险地认同的东西。

我们能在一个令人信服的答案（解决相关问题的）中找到零吗？宇宙是从什么起源的？这里和那里的大门

上有无数的门环（有无数的着眼点）。一个物理学家说："有胜于无的原因在于'无'是不稳定的。"

圣奥古斯丁（St Augustine）在他的《坦白》中长期苦苦斟酌这个问题，也意识到我们的问题超出我们能够回答的能力，并且许多不同的认识能够也应该从书中获取。他得出的结论是：地球和海洋，在开始时是看不见、光线不足、没有固定形态的，上帝一定几乎是从无中制造出来它们的。圣经说："……不是完全的无，因为结构是不清楚的，所以没有任何的美感。"那么在16个世纪之后，当我们发现其他观点与这个观点如此相似时，是否应该惊讶呢？当宇宙大爆炸之后万物冷却时，物质和反物质几乎完全相互毁灭，留下了纯粹的射线。对称不再均衡，然而（它没有任何美感）每一亿对夸克和反夸克中就有一个额外的夸克——物质的基础，平衡中这个微弱的倾斜发展成了恒星、行星、海鸥和我们自己。

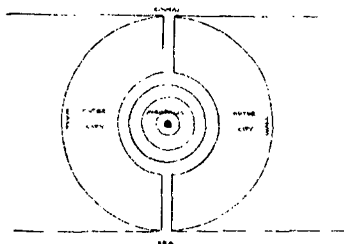


空间的尽头和时间的起点，结果零没有位于我们误以为它在的两个地方之中的任何一个地方。其实更自然的做法是在事物的中心寻找零。这使得零被看做是负数和正数的平衡点。还有，更广义地说，零是让我们安全出航和回归的坐标系统的原点。

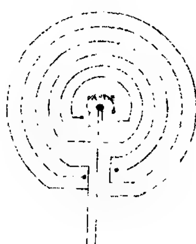
这个中心在哪里？宙斯通过从宇宙的东边和西边同时放飞两只雕来研究这一问题：它们在德尔斐（Delphi）相遇，在那里一块圣石标志着宇宙的中心。这块石头——或常说的中心点，特别是考虑到我们在中世纪看到的奇特符号⊗之后，对零的形成起到了作用吗？宙斯后的很长一段时间，亚里士多德非难毕达哥拉斯的追随者，因为他们在纯理论的基础上，将太阳作为宇宙的中心（他们说，火优于土，所以值得这种赞誉）。他的观测则使他确信当时大多数人所知道的：地球是宇宙的中

心——这个观点一直保持很多世纪。

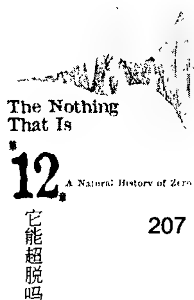
中心的中心被早期的穆斯林天文学家称为“地球的炮塔”——被印度人称为兰卡（Lanka）岛，就是他们的0°经度，但是（令人迷惑的是）没有纬度。就是在那里，恶魔阿凡纳（Râvana）建造了迷宫似的城堡雅凡纳，他的计划令人想起亚特兰的儿子们在柏拉图的亚特兰蒂斯岛上建造的宫殿。但是亚特兰蒂斯岛因为自身原因沉没海底。1 000年前的旅行家奥波尼（Albīrūnī）说，那里没有这样的圆形屋顶了。他猜测兰卡岛是食人岛兰嘎（Langa），那里是丁香的原产地，也是天花的发源地。



亚特兰蒂斯的宫殿



雅凡纳城堡



在1560年哥白尼给予地球中心说以致命打击之前，地球作为宇宙中心的学说就曾遭到一系列变革和猛烈地攻击。例如，亚里士多德的追随者中的一员斯多葛斯（Stoics）认为物质宇宙在无限的空间中漂流。前者可能有一个中心，但是很明显整个空间没有中心。接近中世纪末的时候，尼古劳斯·卡赞诺斯（Nicolaus Cusanus）声称物质世界就其本质而言是精确的，因此地球和宇宙本身都不能是真实的球体，因为更理想的事物总只是在可能中存在。从而，因为二者是无限的，它们都没有中心。他说，事实上，宇宙的真正中心与它的圆周相重合，并且不是物理学意义上的：完美只属于上帝。因为没有

人类可以到达这个中心，我们所有相异的观点其实是等同的——并且都缺少客观性：

> 将这些多种多样的假想结合在一起……那么，你可以理解宇宙和它的运动不能用一个图形来描述，因为它几乎表现为一个轮子套住另一个轮子，并且一个圆套住另一个圆，像我们看到的那样，没有中心或圆周。

如果你想大致了解在动荡的5个世纪内西方思想中的中心是如何变化的，只要比较对这一暗喻的三种不同看法，卡赞诺斯的这个暗喻正好能表达他们的看法。第一个看法来自20世纪的书《24位哲学家》，在这本书内上帝被描述为：

> Sphaera cuius centrum ubique, circumferentia nullibi：
>
> 一个处处都是球心，没有圆周的球。

前一段话引自卡赞诺斯，写于1440年，接下来是：

> 好像宇宙的结构处处有它的中心并且没有圆周，因为圆周和中心是上帝，上帝无所不在，而又无处存在。

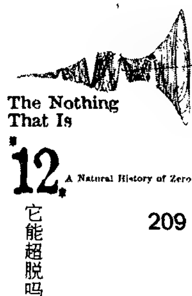
到1660年之前只有这种看法流传下来。帕斯卡（Pascal）在他的《沉思》中写道：

> 整个可见的宇宙……是一个无限的球，它的中心处处存在，并且它没有圆周。

因此我们从有限出发，通过无限，到达一个无限的宇宙。

对哥白尼来说太阳是宇宙的中心，50年后的开普勒（Kepler）也这样认为，后来的牛顿亦然。在他们中间，伽利略（Galileo）持谨慎怀疑的态度："我们不知道去哪里寻找宇宙的中心或者它是否确实存在。"因为表示这样的怀疑态度在政治上是不正确的（并且当时形而上学的丑闻比现在自然学科的丑闻会带来更加严重的惩罚），也许也因为伽利略明白自己没有办法验证，他撒手不管这个问题。

莱布尼茨不是那样，他针对空间学说发动对牛顿的攻击。对于牛顿，空间是闪光的框架，它包含了事物之间的关系；对于莱布尼茨，空间只是这些相关事物的顺序，并且不能离开这些事物而存在。不像在爱丁堡，两个通过窗户相互争吵的女人一样，她们永远不会同意对方，因为她们从不同的前提出发而发生争执。牛顿和莱布尼茨永远不会达成一致，可是他们的前提是一致的：上帝需要最崇高的赞颂。牛顿认为绝对的真空空间，意味着上帝对空间内一切的连续统治；莱布尼茨，则理解为上帝总是要上紧一个变慢的时钟的发条。



争论本身起伏跌宕，其间变换着条件、修辞和支持者——然后被200年后的爱因斯坦的成功一扫而空。莱布尼茨明白牛顿变戏法似地提出绝对空间是为了（在他的第一定律中）谈绝对空间中的绝对运动，但是从来没有这样的运动被观测到，因为你会察觉到没有变化——因此绝对空间的假设是没有必要的。爱因斯坦在它的开始处标上标志。他意识到，一个人从个人认识水平出发观察到每个事物都有着自己的中心、自己的零。只要认识水平不变，或相互做使其相互结合的运动，并且从不同的认识水平出发，对不同的观察者来说事物发生在不同的时间和地点。控制事物的法则——物理法则——可以

看做完全一致。这是爱因斯坦的相对论，它既不肯定也不否定绝对空间有固定中心的观点，但使它变得没有意义。

仅仅有少数的反对意见就使你完全怀疑宇宙论，或者怀疑它一定是神学的附属品了吗？你担心这种观点隐匿了它自身的测不准原理？而这个原理使我们确定一个位置在哪里或者位置变化有多快。困难在于试图通过连接极少的数据点来描绘出宇宙。举起宇宙的最后一只大象站在一只海龟背上吗？或者大象自始至终在海龟下面呢？尽管奥斯本·雷诺（Osborne Reynolds）没有信心认定，任何解释都将和有限的证据相一致。一个理论出现并繁荣发展可能只能看它与事实符合的程度。如果时势是审美的，优雅会高于纯粹的沉闷苦干，同时光辉业绩也不只是为使其臻于合理的缝缝补补。甚至一个挑剔的群体的从容追求也可能一边倒地将自己的科学研究转向验证那些完善的假设。

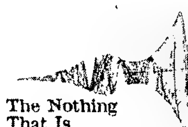


更基本的是，当恰好处于你的领域的边缘时（总是在科学发生变动的边缘），你就可能相信移民们的想法：远处的世界和眼前的世界是相似的，竭尽所能地将已知法则在分析方法上延续，就是为了了解未知的领域；或者像探险家一样，你可能努力使自己从褊狭的过去中脱离出来，并为事物奇特的本质而激动不已。阳光下没有新的事物了吗？那么就超越它！当对于一个灰尘粒子而言，我们都是自不量力者时，我们中的天文学家看起来更得划人替补阵营了。

当然，移民或探险家——他们最终是科学家而不是空头理论家或文学评论家，他们读自然科学方面的书，却并不从新的或过时的评论、符号学或结构主义中得到益处。他们认为作为人，对有一些事物他们无能为力，

并认为这些事物之外的东西，是意义明确的（不像《圣经》）、不依赖于我们的解释的。他们的结论大概有点狂妄，但他们的方式是谦虚的。并且，在他们的内心深处，仍然像科研工作者一样客观、公正地看待事物。对他们来说，已经成文的数学公理对于同一现象有几种不同的基本形式：它们并不是简单地证实事物间的相互关系，而是与数学家的发明相似。而且，我们惊异地发现，这些发明是从事物最异常的表现方式中得到的。

那么，为什么天文学家的革新成为旧有理论的中断而不是延续？因为威廉·韦卫尔（William Whewell）说，大约150年前，一层理论的面纱遮盖了整个自然界的真面目。科学家们看到了它，却不能透过它看到自然界的本质：这是一层纸制的面纱，由许多支离破碎的事实拼贴而成。这些事实组成了科学家们最初粗略认同的情况。这是一层当论据彻底枯竭之后，各层之间开裂、剥落的面纱。



然而，零使这一层理论的面纱出现了漏洞。在这一过程的最大程度和最小程度之间，我们看到了一段差距。物理学最深层次的理论写在纳皮尔的“关于零的方程”中：守恒法则。这一方程说明了一个系统中总的能量（电能、动能、势能）保持不变：能量之间相互转化，总的变化量等于零。这些法则至少可以追溯到笛卡尔时代，他认为：上帝将自己创造的东西传诸后世。尽管物理学研究的对象不断变化，变得更加明确，还可能经过时间推移而增加，但表达它们守恒性的法则是它们本身所固有的。这一类法则不是装饰性的：它们是一些最基本的理论单元。通过对事物的比喻，就可以使我们建立起一个详细的概念。从而，从外表看来，它们中的一半都是零。

一个生动的例子是：也许研究静止物体的平衡受力并不那么容易（例如，一个滑轮系统），但这比分析运动物体（摆动、滑动、旋转、反弹、下落）的受力容易得多。显然，任何使动态受力分析转化为静态受力分析的方法都是受到欢迎的。这就是让·达朗贝尔在1743年通过一个非常偶然的机会做到的。在方程惟一的形式中，我们再次从语法能够产生深刻理解的力量中获得乐趣（就像宗教，必须修修补补完善自己）。

牛顿第二运动定律说明的是，使物体运动的力等于物体的质量乘以它的加速度：

$$F=ma$$

这将三个量放入相互定义的怪圈之中，使分析这些力变得极端困难。达朗贝尔仅仅是改写了牛顿的方程，就非常有效地解决了这个问题，他将其写为：

$$F-ma=0$$

然后将“-ma”本身看做一个力，“惯性力”：

$$I=-ma$$

所以我们得到：

$$F+I=0$$

于是，力F和I的和产生了平衡，由此动态转化为静态。当然，包含有特定的力和“惯性力”的方程仍有待解出——但他们现在可以按照相似的平衡问题的方式和便利之处来理解。

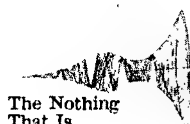
如果在分析时加上外加的力和惯性力，达朗贝尔的理论就变成：任何受力系统都处于平衡态。这一理论具有复式簿记的特征：通过一点小技巧，就能达到零平衡。魔术师的助手有其他助手帮助他们。

你可以正确地说出守恒法则，就像说出达朗贝尔的理论一样，这是事物间的相互关系而不是确实位于此处

的事物本身。由此，二者都不是法则所涉及的零。在这一章开始时，我们所提到的实际粒子，不仅在被看做粒子的事物中，而且在其他事物之中。实际应用中，物理学家更多地把它们看做数学上的隐喻，能够帮助构思和计算，与微积分学中的微分非常相似，它能够帮助计算曲线斜率，一旦计算结束，它就消失了。莱布尼茨说：只有个体是真实存在的，个体间的联系都完全属于思想范畴。我们应该修正他的说法吗？我们如果将零看做一种处于思想和物质之间的相互联系，就可以使思想和物质都得到解释，并且都具有真实性。确实，这就是为什么渺小的数字零，总是活跃在我们生活中各种事物周围的原因。

例如，温度计上有零。华氏（Fahrenheit）在成为标度之前是一个人的名字。他选择了零作为冰盐混合物所能达到的最低温度。雷内·德·列氏（列式温度计发明者）在还没有研究鸟巢的种类或者证明绳子的强度小于各股强度之和的时候，通过辩论使零成为水的凝固点。安德斯·摄氏（Anders Celsius）在拉普兰观察到了北极光——这一位置恰好帮助他设计出了摄氏温度计的零。威廉·汤姆斯在83年的生命岁月中，一直不停地标定计量单位，最终将零度设为运动停止的温度。

人为万物的尺度。就像全世界所有船只的吃水线，它通过显示安全和危险装载的水平面来挽救船员的生命：当塞缪尔·普利姆索尔（Samuel Plimsoll）挥拳打在迪斯雷利（Disraeli）的脸上，并叫来和他一类的议会同伙，阻碍可能使声名狼藉的“棺材船”成为非法的法案生效的时候，他几乎倾覆了自己的命运。午夜、子午线及所有的度量标度，都是按照一些边界制定的，我们几乎相信这些边界的存在。但是，这些标度却没有显示出它们



发明者的个性。

是否仍存在这样一层理论的面纱呢？零是使其出现漏洞。它并不像宇宙一样遥远，然而已足够远，只能像计算外部空间的事物一样计算它。我们会时不时地陷入笛卡尔的空想之中，在这里我们与自己的身体相遇，我们就像是自己身体的搬运工：闲散的头脑中习惯性的思维模式。专业运动员经常以一种奇怪的、第三人称的方式谈起他们取得的成就：用球拍、球和手套来评价胳膊和腿的能力。



我们经常不能完全体会运动员们每天的训练，例如：投球和跳起投球，伸长手臂碰到高球并准备还击，撑竿跳时轻松地克服重力作用，俯身在冰一样平滑的曲面上并直立起身的过程中所表现出来的卓越技巧。像猫一样，他们是有杰出表现的天才：一种我们在舞蹈或者旋转中所逐渐意识到的感觉，并且这种感觉在每天的几千个动作中是体会不到的。身体中的零就像机器的轴心。你仅仅需要回想一下恐高时恶心的时刻，或读到关于人们遭受耳内失衡和灾难性地失去方位感的书籍的时候，就会意识到，零是多么不经意，又是多么重要地使我们的各种感觉不至于偏离航线。

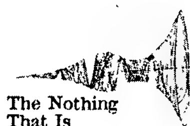
像我们偶然看到的零中间有一点（θ），在思想中，存在这样的一个零吗？它不同于身体中的零，并且使上述符号（θ）产生。没有任何事物比平衡更接近位于帕斯卡无限球的中心。这个球无所不在：因为我们确切知道我们的球是独一无二的中心。我们将它叫做“我”并猜测——在一定程度上，只有运用想像力才能理解，当我们用“我”表示我们时，其他人也通过“我”来表示他们自己。我们意识到，他们说到“我”的方式与我们相同。这显然将我们与世界联系起来。

我们所适应的是一个从未解释过的、似是而非的理论。所以，当歌手开始练习音阶时，总以为“1”(doh)就是“c”调。当他了解到，在另一种习惯做法中，“1”实际上是任何调的第一个音符时，仍然认为“1”就是“c”调，“我”仅仅属于我们。这样，就违反了“1”可变的原则，并且不加分析地使用了人称代词。也许，我们总是习惯将这些陌生的用法翻译为我们自己的、恰当的语言。

而且，这些自我的零，因为它们不能被感官所感知，所以我们可以认为它们不存在吗？如果这种认识是对的，那么我们真正理解它了吗？零也许是特定的时刻，也许是眼前一闪而过的物体，也许是倾斜的光线中恐惧的阴影，却从未与蛇有关——

呼吸并不急促
零却已经无情地揭露了真相

危险使我们了解到我们拥有一些珍贵的东西——却不知道它们是什么。我们拥有自己不能解读的预言。就像希腊的信使，他们携带着缠在一根木棍上写满字的细长丝带。只有当信的各个部分集合到收信人手中并重新缠在木棍上的时候，信的内容才有意义。



第13章 有蜘蛛的浴室

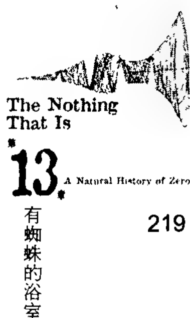
The Nothing That Is

A Natural History of Zero



零既不是负数也不是正数，而是这两个王国之间最狭窄的禁地。然而，我们惯于分析的思想，曾经急于看到这张中性面孔的符号，现在掌握了它空的含义并了解了它的能力和前兆。首先，我们寻求最糟的情况下它是什么样子——在下一章中，我们可以看到同一个空是如何显示良性的。

在中世纪，零曾被看做魔鬼的工作或者魔鬼本身——伟大的价值删除者。多么容易想像，你把自己当做一个废物、不中用的人一脚踢开。阿卜杜拉·哈密德二世（Abdul Hamid the Second），恐怖的19世纪亚美尼亚大屠杀的作恶者，据说让检查员从流入他的王国的化学课本中删去任何涉及H_2O的部分，仅仅是因为他认为这个符号代表"哈密德二世就是零"。抛弃那些我们拒绝接受的东西是很容易的，例如那些纯粹的零、黑洞里的所有物质、个人的记忆，这些东西可以消失得无影无踪。



空心椭圆似乎代表匿名，反映我们害怕与他人——或与任何一个人，或与世界没有差别："……雁过而潭不留影。"威廉·麦克菲（William McFee）在《大海的随意》（*Casuals of the Sea*）中曾经这么写过（他自己留下了极少的踪迹；在我看来，仅仅留下的是他在学校做实验时样品台上倾斜玻璃发出的微光）。

你曾被零戏弄过多少次：现在不能叫出名字的老年鉴中那些面孔，看不出任何特征的陈旧住址名册中的那些名字。它们汇集成一团，有时你喜欢作为一个单纯的观众挤进其中——直到冷静地思考来自你自己的名字，它写在放在墙角抽屉里的那个破烂的地址名册里面，并且还没有被认可。

像零一样生活：多余的人、没品质的人，像亨利·詹姆士（Henry James）笔下的约翰·马凯（John

Marcher）这样的人，在生死关头已经没有生的愿望，他们认识这个道理时已经太晚了，他们对热情无动于衷：这种情形经常出现在我们的幻想和事实中，如日本社会的工薪阶层、公司职员，他们都逃避现实游戏。不像马凯，最糟糕的是：他们大多数人从未对他们所处的现实醒悟。

这就是存在主义核心处的虚无：对它的认识不足导致极度的厌恶。这是一个选择你将是什么的时刻（因为所有的选择、生存的选择，都是不必要的、都是武断的、都没有优先的意义）。你开始与随机选择一同退出，信奉随机，并在经历过程中理解你的本质：萨特对本质优于存在的托马斯主义原则能够灵活运用。因此，一个任意数字被塞到一串零之前，便产生了很大的数值，而这里除了一串零以外，曾经什么也没有。但是萨特死了，而且他的真实性稍后随之也消失了。存在主义的盛行已经过去，如今只是在连续的青春浪潮中有所遗留，而且还是在收入和花消开始之前。



至少那些没有觉醒的人们还沉浸在他们的梦中。零还有一个更可怕的化身：极为愧疚地确认自己绝对无用。甚至在孩童时期，自我谴责的人就知道他们淘气的语源：它来自零。他们像哈姆雷特一样听到自己在问自己，爬行在现实和天堂之间，自己应该做些什么。当多恩（Donne，1572~1631，**英国玄学派诗人和神学家——译者注**）称人为零，无限小于一个数学点，小于假想的原子时，就是针对他谈到的每一个人。但是，在灵魂的黑夜中，讲道坛上一个很大的声音对着确定的存在大声地说：零是无尽否定的惟一开始。

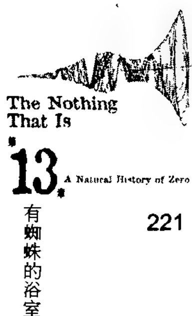
在意志力的作用下，没有逻辑可以认可，然而幻想沉淀下来，你把没有你存在的世界看做它本来的面目，

却像约翰·班扬（John Bunyan）那样绝望了：

> ……在我自己眼中，我比一只蟾蜍更令人讨厌……我既是自己的一个负担又是一个讨厌鬼。现在，我也不明白，什么使我厌倦了我的生活，可是却害怕去死。

像济慈（Keats，1795~1821，**英国最伟大的诗人之一——译者注**）在奄奄一息的时候说的那样，你的名字如何可能成为书面文字呢？它的音节是怎样在物体的嗡嗡声中消逝的？一本关于最新电脑空间密码系统的书告诉我们：

> 把交谈淹没在一阵喧闹声中，以便无人知道一个交谈是否确实存在。把你的存在消融至虚无……



当然，作者继续叙述：

> ……然后把它从虚无中拉出来，这样它可以获得重生。

我们如何确信可以遵守这个承诺呢？你从来没有失去过你电子邮件中的有用信息？ Animula vagula blandula，罗马的哈德良皇帝这么写道，很少有灵魂徘徊不去。你的灵魂和奇怪的货物一块贮存，将永远破碎、无法弥补，这种无法挽回是多么的不公平呀。或者，它是忒修斯令人迷惑不解的船，每一次睡觉都会拔掉它最小的钉子，每次醒来后，都会在原来的形式之上用新的物体重新建造。

这些消极的虚无循环可能会在我们头顶悬挂几年——然而像西尔维亚·普拉斯（Sylvia Plath，1932~1963，

美国作家——译者注）写的一样：

> 我是如何在某一天知道（在大学、欧洲、某些地方、任何地方）钟形的罐子，伴随着它沉闷的变形，将不再重新恢复了呢？

可能存在比这个零更消极的零吗？有一个：在其中的宇宙和万物（因此，你自己也在其中）没有任何意义。只是低头看看那小沟就发现它是千年冰川的踪迹；只是把天空的蓝色面纱拉开，就看到因果的盲目扩张：突然，所有发光的东西此时仅仅是闪烁。当哈佛的哲学大楼接近完成时，一些系想把门口上的题词写成这样："人为万物的尺度。"（Man is the Measure of All Things.）然而，在揭幕式上，他们发现石头上的雕刻是："人算什么，你竟顾念他？"（What is Man that Thou art mindful of him.）

对内心世界的隔离留下了单色世界，但零并不隔离，天生就是内心世界的显露。曾几何时，你认为你（也许是自卫地）对自己失去了兴趣……或者对你曾经爱的人失去兴趣。冷漠自动地传遍你的亲戚朋友和同类人。万物无情地回头看着你。你将你的世间清醒展示片刻，接着便久经世故地玩世不恭，然后是长时间的玩世不恭，而后的脱离让你陷入绝境，不时被古怪的眼光打量："你一定是病了。"在陀斯妥耶夫斯基（Dostoyevsky，1821~1881，俄国作家——译者注）的《罪与罚》中斯维德里盖洛夫（Svidrigaïlov）对拉斯科利尼科夫（Raskolnikov）说：

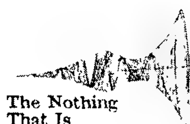
> 可是一旦稍微有了点儿病，身体上尘世的正常秩序稍一遭到破坏，那么立刻就会出现接触另一个世界的可能……如果那里只有蜘蛛或

> 者这一类的东西，那又怎样呢……我们一直想像，永恒就好像一个无法理解的概念，是一个硕大无朋、奇大无比的东西！可为什么一定是奇大无比呢？万一它并不是这样呢，您要知道，它也许是一间小房子，就像农村里的澡堂，又黑又脏，各个角落都是蜘蛛，而这就是永恒。

我想知道，你是否发现幽闭恐怖症比无边的旷野恐怖症更糟糕吗？数学家和物理学家赫尔曼·威尔（Hermann Weyl）提出当自负消失时，坐标空间未标记的栅格依然存在——就是你在前面的章节看到的无限的、没有中心的空间，在移动的惯性参考坐标系中，我们在这个空间建造游泳池。在福特·麦道克斯·福特（Ford Madox Ford）的小说《好士兵》中是这样描绘这个空间图像的：

> ……在一个无边的旷野上，悬挂在半空中，我似乎看见三个人，其中两个紧紧抱在一起，而另一个却经受着难耐的孤独。也许我对这个判断的描述是一个黑白的蚀刻版画，只是我不能把一个蚀刻版画和一个摄影的复制品识别开来。而这个无边的原野就是上帝之手，伸出很远很远，在它的上下都是巨大的空间。

无论理解多少，无论理解好坏，所有不同地方的差别都是为了更好地表达意思。只有当它们分裂开，留下一个空白的背景或者没有背景的图形时，不存在才大量地涌来。意思表达需要插入上下文的内容，它反过来需要使两者分离的东西。好像在最近的这些离题讨论中，我们已经错将它环内的空白看做零，或者将零作为环外围的空间。但这两者都不是零——零是环本身。



第14章

总是下午的地方

The Nothing That Is

A Natural History of Zero

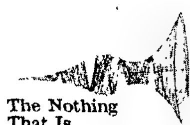


整个空无对这些人来说是压抑的现实，但他们至少安心其中，而消亡意味着这个压抑现实的终结。在多云的11月，他们带着一种满足阅读叔本华的著作，还理解了在佛祖面孔上心照不宣的微笑：万物皆空。对他们来说，零至少不是负的。一个朋友告诉我，在贝克特写的书中，有一章节得出这样的总结，将万物的微小相加，它至少比虚无更好。

“真的吗？”其他人惊奇地说，“比虚无更好？何以见得？”

不知何故，作为一个安慰，这种对虚无的渴望，听起来有点虚伪，因为它喜欢你不存在，却荒谬地假设你的存在。这样拙劣的想法成为许多人对涅槃误解的理由，而涅槃一直作为非人类的极乐世界。它部分地解释了斯温伯恩（Swinburne，1837~1909，**英国诗人及批评家——译者注**）响亮的声音。斯温伯恩用简短的感恩祈祷感谢上帝，无论如何没有生命可以长生不老，而且最疲劳的河流经过迂回蜿蜒，也在某处安全入海。但是在音节中享受的感官上的快乐远胜于众人口舌之争，也许这是善意伪装下不同快乐的一种暗示。

甚至更可喜的是——当我们观察位于中心的零慢慢地从负到正改变它的符号时。它静静不动：20世纪70年代给予植物这样无意识的生命富有意味的赞许。然而它并不是我们渴望的完全无意识——不是从青春期痴呆到紧张性精神分裂症的变化，更确切地说，拥有像我们一样的智慧但是没有利用。一个天外来客会认为这是多么奇异的理想——但是我们自己知道：昏昏欲睡的日子、在海边的日子、喝完一壶酒的日子，一块面包和一本平装本的浪漫故事，一个吃了忘忧果后只做极乐梦而忘却尘世的痛苦人在一个总是下午的地方。



它是多么美好呀，聆听潺潺的小溪，
似乎一直半闭着眼睛
在半梦半醒中入睡！

为什么同我们兴奋状态相对的反常状态竟然是美好的呢？过去的解释有时候仍然很合适：显而易见的安逸证实了我们的优越（即使观众只是我们自己）。如果将动机从物质上转移到精神上：潜力看起来总是大于现实——也许是因为使用像它本身一样轻松伸缩的刻度来测量它的缘故。

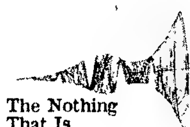
迄今为止这些虚无的零很少显示为正的，这是因为它们表达的思想状态都是消极的。我们开始激活它的图像，你会发现零汇集了负荷。当然，当每个人获得了消除坏账的权力，赎罪的仪式就将岁月的伦理簿恢复到零。这最终实现的报应多么令人吃惊，仅仅通过宽恕邪恶，善良就可以被重新塑造。

一种被众人认识到的心得是将他们自己简化为零，贬抑他们的傲慢，消弱他们的体格，最后形同中世纪瘦弱的圣人。

羞怯、文雅、还有低级的痴迷混合在一起。福楼拜（Flaubert，1821~1880，**法国小说家——译者注**）在无情的细节中描述的那颗令人同情的心，在百万个充满生活回忆的房间内跳动，而这种生活是为他人而生活。而且，如果你查询“虚无本身”（Nothingness Itself），你会交叉引用到尊敬的神父：安东尼奥·马吉尔·耶稣（Antonio Margil de Jesús），他是这样称呼自己的：拉·密斯玛·纳达（La Misma Nada）。他是3个世纪前西南美洲的一个圣方济各会的传教士，他坚信永不放弃的任何事情都将抢走上帝的荣耀。他称玛丽·拉·杜纳·纳达（Mary La

Doña Nada）为虚无太太。迁移后生活在美国的印第安人和认为零是死亡之神的那些人是一个祖先传下来的。

关于我们道德问题的细小变化，对于那些把谦虚作为超度的人来说，很容易和马吉尔神父这样的人区别开来。我们总是卷进一个口头语中："不像他那样圣洁。"这其中蕴涵的潜台词是："……但是比你圣洁。"故事讲述的是：有两个富人在一个神殿内相互攀比，抗议他们的低微。"啊，上帝！"一个人说："与你相比，我还不如一个沐浴在阳光中的蜘蛛网！""但是我甚至比织网的小蜘蛛还要渺小！"另一个人声称。就在这时候，一个穷人走进来，几乎在光辉闪耀中眩晕。"上帝！"他欣喜若狂地大呼起来："你们的杰作是多么辉煌呀！哎呀，与你们相比，我比粘在蜘蛛网上的灰尘细粒还要渺小！"一个富人用肘轻推另外一个，悄悄耳语："看，他正在宣称自己是什么也没有的零！"



攀登神圣之路是艰辛的，但不知何故，因为零像一个光环那样闪耀光芒，要达到它必须付出相当多的努力，这看起来并不容易。你既不是在事物沉寂之上蹒跚，也不是在平坦的道路上前进。举例来说，像在道教中，或瑜伽中那样：平静内心的欲望，抑制热情和绝望的情绪波动，使它们处于稳定状态，在这样的状态中，你可以再一次听到自然之音。图像和背景相互颠倒：不是零，而是所有喧闹声渐渐归于不存在，维吉尼亚·伍尔夫（Virginia Woolf）这样生动地描述：

> 每一天都包含着比存在更多的不存在……善良……镶嵌在一种难以描述的棉絮中……一个人行走、吃饭、观察事物、处理必须做的一切；损坏的真空吸尘器；预订午餐；与梅布尔签署订单……那

时作为一个小孩，我的岁月正像他们现在做的那样，包含很大比率的棉絮……在圣艾夫斯家度过一周又一周，然而没有什么在我心中留下痕迹。我听说，必定存在一个意外而又猛烈的打击……于是我观看着门旁边的花坛；“那就是全部。”我说。我欣赏一个枝叶茂盛的植物，而花儿本身是泥土的一部分，花坛包围着所有的花，而且那全是真花；部分泥土，部分花儿，这个道理突然看起来很简单。



摆脱生活的棉絮——或者更迫切地，清除这个肮脏世界中无法逃避的混乱。当纯净再次闪耀在地平线上的时候，零的价值在增长。它有各种各样的表现形式。有些人通过洗脸来去除他们的罪过，因为在每一个糜烂的灵魂中，一颗禁欲的心试图挣脱出来。另一些人清洗世界展示给他们的面孔，像心理分析学者雇来打扫他们房间的强迫症病人。

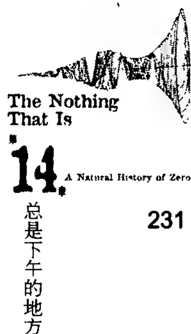
然而，对于一些人而言，宗教上的动机都会是美好的。在这里，简约已经被公认为朴素艺术的核心。例如：迁徙鹤群的最后尾羽组成的一个白色日本屏风；在斯堪的纳维亚半岛上完美的白木和白雪；简单的智慧；精练的旁白。极简单抽象主义的艺术被朴素、暗讽、高雅的神主宰着。它还领导着哲学，要求他的学徒们净化自己的思想，便于更好地在思想中描述真理。数学家们喜欢将定理的巨大枝蔓简化为少量的基础法则，最后成为一套简明的公理：也是滤除实际意义后的一系列抽象的公式。

一个空的存在，最终一定会将上下关系汇聚到一个焦点：这就是那些不可见的零的理想。它们的动机各异：躲藏在盗贼的生活之中；在黑暗的笼罩下或躲在后面实

施真实的或想像的控制；间谍故意假装平凡；记者偶然匿名。也许，所有这些当中最复杂的就是作家的敏感性：亨利·詹姆斯（Henry James）称它为一种巨大的蜘蛛网，似乎看不到但是能捕捉到试图通过它的一切事物，并将空气的脉搏转换为生活的启示。

是不是对这种透明物的尝试似乎太做作、太吃力，恰好解释如何滑进无人的世界？他们听起来更像杰克·伦敦（Jack London）的没有修饰的故事“影子和闪光”中的朋友之间激烈竞争，他们试图通过使自己隐形的方法战胜对方——一个通过吸收光线，另一个通过反射光线（最后，他们的出现必定暴露给对方）。也许你会尽最大的努力使你自身隐形，实际上这么做总是不可想像的。爱默生正在勾画这个普通的寒冬黎明：

> 伫立在空旷的荒野中，我的头脑充满愉快的气氛并飞进无限的宇宙空间，所有的狂妄自大都化为乌有。我变成一个透明的眼球；我是虚无的零；我看到了一切；绝对存在的涌流在我体内循环不止；我是上帝的一部分或粒子。距离最近的朋友的名字变得无关和次要：兄弟、熟人、主人或奴仆。此时，他们不过是无关紧要和多余的干扰。



在理解这段话时，无关紧要的干扰就是“我的”全部：如此反复重申一个自我是多么无私？很奇怪我们每一个人有规律地组成一个客观的角色。在一篇课文中，“他”（he）和“她”（she）交互使用，阿里斯托芬的（Aristophanic）的“s/hes”使人联想到虚无的零和巴斯（Barthes）的“s/z”一样，“person”（人）表示地位高的“man”（人），而“E”或“ha”作为阴阳人出现：我们

是否应该说“多萝西·帕克”（Dorothy Parker）并利用它呢？因为她描述一个她已经去过的舞会，这里有7种性别：男性、女性、男同性恋者、女同性恋者、雌雄同体的人、无性的人——和她自己。在整个争吵中，真正的失败者很显然就是零，它——假设它能说话，会比任何人用更大声音抗议这个通常被称为“一”的不真实的自我。

然而，这些不规则的和直接滑行的方式趋向零，由几千年的进化文明完成，与我们每天从事的不费力气的愉快事情相比，它们是什么呢？我指的是阅读的快乐，沉醉其中的人发现自己成为另一个人，又一个人，又一个人，或者赛过空中飞翔的天使。这种提高就是看不见的作者献给不知名的读者的东西。没有他们，所有看不见的动作都是失败的。有一次在宴会上，亨利·詹姆斯回答那些崇拜他的邻居提出的关于他小说的问题，然后惊异地转向那个邻居。“如果它可能是，那它就肯定是，”他说，“你是无实体的灵魂的体现，几代小说家已经这么徒劳地祈祷，存在依然是难懂的和不可避免的。简而言之，文雅的读者，我经常想知道你将以什么样的装束出现……”

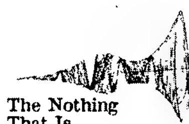
当零改变了它的情感象征时，我们已经从虚无的谷底走到巅峰，从绝望走到欢乐。但是能把零想像为有无限价值的，不是来自上帝创造世界的那个零，而是神性自身吗？所有事物都可以在复杂的思想中找到，而且比在同样起伏的阿尔卑斯山更容易找到吗？19世纪前10年的中期，洛伦茨·欧肯（Lorenz Oken）在羞辱中从祖国德国流亡，在外面度过了他生命的最后岁月。他从几个最初的法则，通过纯粹的逻辑推理，推导出了整个生理学、动物学、生物学、心理学和地质学的相关法则，而

且我希望，当他的朋友、导师和祖国抛弃他时，这些理论能够在苏黎士支持他。

我看到他浑身缠满纱布，艰难行走，他的头顶笼罩着微弱的幻想和思索的蒸汽。在这里，总结为一句话："零是基本和永恒的作用，不断地假定它自己。"他停顿一下——这是什么？哈，一个同路的人，出卖了威斯利(Würstli)。"因此，上帝就是零，而且零有无限的力量。"一阵痉挛，瞬间的皱眉——他继续缓慢地移动脚步，然后在一个石狮前突然停止："但是人是算术的全部，是整个数学！因此生活……"他犹豫了一下，悄无声息地向前走——"生活……"在瑞士他领会了生活："生活只是一个数学问题——它不断地向上追溯，最后直到人类！上帝是有无限力量的，但是人类是无限延伸的！每个事物都是从海胶中创造出来的，因为爱是从泡沫中出现的。负数始终通过黏液向下变得更负，而正数始终向上变得更正，通过零传给人类！"

他转了一圈，而他的思想也转了一圈："它是如何……"来到街道边，走进极其干净的城市："因为人类是完全验证过的上帝！人类是能意识到自己就是上帝的！" 对我们来说，这个思维转折得太快，我们无法理解。我们看到他逐渐向上，身影越来越小，又听到一个微弱的回音："上帝=+0-，人类=+∞0-∞…"

正零有一个最后的变化，以其特性，它甚至比欧肯描述的零更加奇特：因为这个零总是存在于正在进行的时间的起点。它就是美国人的零。偶尔，你可以在我们的旅行小说中看见它："噢，看，"坐在车厢内赫伯特旁边的洛丽塔说，"所有的9正在变成下一个1 000。"从仍然用思想唤醒自己的人们那里，你也许听说过它：今天是我剩余生命的第一天。它就是用分界线定义的一个社



会中的零："因为连续周期性的冰碛（**由冰川携带并最后沉积下来的石砾、石块及其他碎石的堆积——译者注**）是由连续的冰川作用造成的，因此每个分界线留有各自的痕迹。"这是弗雷德里克·杰克逊·特纳（Frederick Jackson Turner）在1893年写的。他列举的分界线的痕迹包括力度和粗糙度、丰富的想像、创造力、自私自利和个人主义、过分热衷特权和对教育缺乏热爱，这当然包括冰碛的分界线痕迹和社会分界线痕迹。当然，我们从来没有忘记向历史学习，因为我们每一个人都知道，像托马斯·沃尔夫（Thomas Wolfe）的《天使望故乡》（*Look Homeward, Angel*）中的英雄一样，我们选择的辉煌是"由历史上的先锋创造的"。

特纳哀叹100年前关闭分界线——但是它永远没有关闭。这不是边界线已经在空间或社会或技术上展开，而是我们都依靠移动的分界线而生活。我们像杰斐逊（Jefferson）那样伫立在我们帕拉第奥（Palladian，**一种建筑风格——译者注**）型的窗口前，眺望窗外的荒野。轮转的岁月与我们格格不入，从过去就开始的线性时光在将来会激起我们爱争吵的本性。

"美国是零的产地，"哲学家约瑟夫·尼德曼（Joseph Needleman）在肯·伯恩斯（Ken Burns）主持的关于震颤派教徒（**1747年起源于英格兰的基督教组织中的成员，过着公社式的生活并信奉独身——译者注**）的电视节目中说："从零开始，我们从虚无开始。这就是美国的观念。我们仅仅从我们的动机、我们的渴望、我们的探索开始。"而兰波（Rimbaud，1854~1891，**法国诗人——译者注**）——尽管他是法国人，给我们的格言是："总是渴望到达，你就能去所有地方。"



第15章 李尔王是正确的吗

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



我们已经渐渐在数学、物理和心理领域熟识了零。它一直都是难以捉摸的，深究其根源就会追溯到作为它的根基的逻辑学上。由于大量的精力从事于研究零，大量的精力又由于它的存在而被节省，我们能领会零，独一无二的零，并且会问：它能单独创造所有事物吗？在莎士比亚的《李尔王》（*King Lear*）中，当李尔王的女儿考狄利娅（Cordelia）拒绝参加她姐妹们的计划，对父亲进行奉承活动时，李尔王对她说："零将来源于零。"（Nothing will come of nothing.）然而事实上，剧情的展开就是从她的零开始的。

当然了，当0和1联系起来时，我们就会得到所有的数字世界。所有计算器、计算机、电话、电视以及电子设备的运行都是基于以断断续续重新排列的二进制代码0和1来完成的。这种代码是由纳皮尔以灵敏的头脑在1616年偶然间发现的，它是很简单的：用0和1来代替原来的10个不同字符，这也充分说明了位置符号系统的重要性。所以0和1后面的数字2可以表示为10（并不同于十，因为它是二进制表示法，叫做"1－0"）；3就是11，4就是100等等。

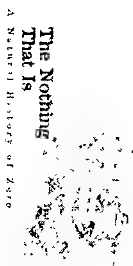
十进制符号	二进制符号
0	0
1	1
2	10
3	11
4	100
5	101
6	110
7	111
8	1000

9	1001
10	1010
	等等

可以这么来理解：在数值构建上苏美尔人基于60的幂，玛雅人基于20（左右）的幂，我们基于10的幂，但是二进制却是基于2的幂构建的。举个例子17＝16＋1，二进制表示为10001，即一个2^4加一个2^0，没有2^3、2^2、2^1

$$\begin{array}{lccccc} & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \text{位置：} & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 \end{array}$$

如果把1代表所有的物质，那么你所看到的是世界上所有的数字都是由1与0连接起来创造的：形而上学者的梦想实现了。通过1和0还可以得到负数、分数和所有的实数：例如−13是−1101，$\frac{1}{4}$是.01。



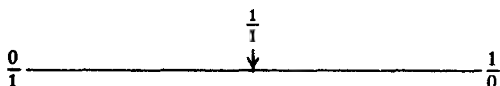
0和1既能表示所有正分数又能表示所有正整数，但是它是完全不同的非常深奥的规则。它的合理程度展示出在数学大厦中有多么大的空间，而我们可以多么灵活地运用它们。在19世纪，为我们打开通往无限空间之门的数学家乔治·康托尔（Georg Cantor）这么说道："数学是自由王国。"

离心率从最基本的运动开始。我们研究的领域仅是一条直线，而所有的正数都会一个接一个地在这条直线上出现。通过两个端点可以建立并不属于研究领域的两个目标标志。在左端的标志是$\frac{0}{1}$：如果你用它来替代0，这是一个非常容易理解的符号，因为0排列在正数之前。但是不要把$\frac{0}{1}$当做0的替代物，不要拿它来替代任何事物。它仅仅只作为一个标志，它是一个符号，在运算中这两个数字遵循着独特的规则。

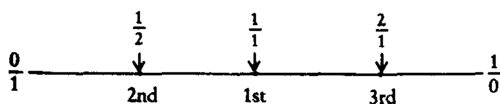
我的谨慎措辞是有意要你为理解右边的标志做些准

备，它就是 $\frac{1}{0}$。在以往经历中我们一致认为0不能作为除数，在这里我们也依然不能这么做。数学是自由王国，为了进行以后的计算，我们选择也必须选择这么做，不久你就会明白我们在这条直线右端建立这个没有意义的表达式的原因了。

那么现在我们就开始从两端 $\frac{0}{1}$ 和 $\frac{1}{0}$ 来产生所有的正整数和正分数。计算规则很简单：将二者的分子相加作为分子，分母相加作为分母，那么第一个数字产生了 $\frac{1}{1}$，我们将其适当地放在这个区域的正中间。



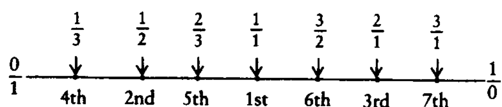
用同样的方法计算接下来的两个数字：将左边两个数字的分子相加作为新的分子，分母相加作为新的分母，从左到右依次计算，我们就会在左边中部得到 $\frac{1}{2}\left(\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}\right)$ 和右中部的第三个数字 $\frac{2}{1}\left(\frac{1+1}{1+0}=\frac{2}{1}\right)$



以这种奇异的方式我们计算出了起先的三个正数：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$ 和 $\frac{2}{1}$。

你开始明白为什么我们选择这两个记号的原因了吧。如果我们要保持一直为正数，我们又需要用这种方法在某处得到 $\frac{1}{1}$，且分子分母都要是其他两个数字之和，那么留给我们的选择就只有1和0、0和1了，这样立刻就会产生 $\frac{1}{1}$ 了。

现在我们仍然遵循我们的简单法则，继续第三步数字的派生，从左到右计算产生这些新的数字分别为：$\frac{1}{3}$（也就是 $\frac{0+1}{1+2}$），$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$ 和 $\frac{3}{1}$，如下所示：



第四步就会在上步产生的8个间距的中间派生出新的8个数字，从左到右依次为：

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{2}, \frac{4}{1}$$

只要你继续进行下去，从左边开始一直计算到右边，将与其相邻的分子相加作为新的分子，将相邻的分母相加作为新的分母，那么你就会在左半部分得到所有小于1的正分数，在右半部分得到所有大于1的正分数。在这个非凡的不断重复的计算中，仅仅使用了1和0就产生了每一个正有理数。为了使你信服这个结果，你可以如此检验：$\frac{5}{3}$应当是在我们的列表中的第13个有理数，那么$\frac{4}{7}$会在什么时间出现？



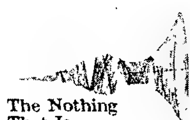
我们在计算中所揭示的数据列表是由越来越多的分数紧密填充的，以其发明者的名字命名为“费瑞序列”(Farey Sequences)。但是这里又一次显示出，数学的历史并不像数学本身那么精确。约翰·费瑞（John Farey）是英国的地质学家，他在1816年发表了一篇关于这个排列次序法则的论文，由于可能超出其能力的原因，他并没有给出证明。然而也不排除这可能是由于他对亨利·古德维恩（Henry Goodwyn）在1816年私下传播的一本书进行了抄袭。亨利·古德维恩在那本书里已经给出了这个法则和证明。那我们从今以后应当叫它“古德维恩序列”？不是的：在此14年前这个序列就曾出现在一个叫赫罗斯（Haros）的法国人的论文里，但现在已经失传了。研究历史时，克莱奥（Clio）发现了具有讽刺意味的事实。她注意到在《国家传记辞典》里，费瑞是由于其写的关于木料测定法和德比郡山峰高度的论文才被简

要记录下来，里面并没有提到他单独提出过以他的名字命名的序列。

无论谁是发明者，这个序列都有些令人难以置信的意味。你可能会认为极小的正分数不会出现（你可以一直都处于任意候选者与0之间的半途中），因为没有开始位置就意味着不能算出它们。再加上在任何两个数之间又有密集的分数，那么我们推论说有大量的分数没有计算出来似乎就是合情合理的了。然而我们计算出的这个序列展示了这些数字连接了所有的数字，它们的确都能被计算出来：$\frac{1}{1}$是第一个，$\frac{1}{2}$是第二个，$\frac{2}{1}$是第三个等等，依次进入我们的列表。我们使这些数字与将要计算的数字协调搭配的方式可能是奇异的，但是它达到了目的：尽管计算出的数字看起来似乎远少于有理数的范围，但二者确实一样多。它的非凡的理性使通常的判断力失效。而正是这种令人惊奇的结果引导先驱们去数学的自由王国里研究开发，也正是这种令人惊奇的结果使所有花费在数学上的努力都变得值得。客观世界和头脑都是神秘的，但是它们的神秘是可理解的。

从0和1出发，我们已经得到所有的有理数，并且获得一个极好的见识。但是问题仍然遗留下来，我们能够仅用0得到所有的有理数吗？如果我们能够用0产生1，那么就可以用像上面一样的简单过程来完成它。这是那些修道士的梦想，在12世纪有一个修道士写了塞勒姆规则（Salem Codex），他这么写道：

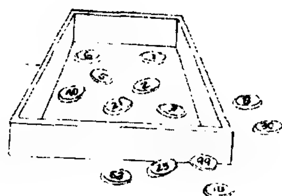
> 每一个数字都起源于1，转过来这个1又来自0，这里面存在着一个巨大而神圣的秘密，他从虚无的零中创造了一切，保存着它，并控制着它：omnia ex nihilo creat, conservat et gubernat。



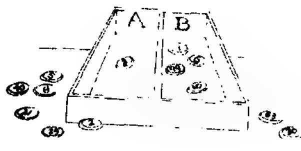
现在，停下来一分钟，就像吉米·斯图尔特（Jimmy Stewart）说过的。你还记得住在英格兰巴斯小镇的艾德拉德先生（大概也是12世纪）有一个学生叫做N.欧克瑞特（N. O'Creat）。但是，我们这里是在用一个精心制作的中世纪玩笑来代替一个意义深刻的双关语吗？男巫师不存在的徒弟克瑞特（nihilo creat）变成了N. 欧克瑞特（N. O'Creat）？纳伯科夫的精神活跃在艾德拉德所住的小镇巴斯吗？

尽快使你自己远离上面插话所展示的场景吧，回到更加吸引人的、验证1来源于0的前景中。因为只用少许的技巧，仅我们人类就能做到它。

你需要少许简单的预备知识。第一，如果你将数字n乘以某个数后期望其结果仍为n，那么这个数应该是众所周知的乘法单位1。第二，一个集合（称为S）仅仅是物的积聚，将其划分为两个子集，称为A和B。所以无论最初在S集合里是什么，最终都将以A或者B结束。最后，空集中无任何事物，它是任意集合的子集（如果盒子里有10个弹球，放入一个隔离物以便于将所有弹球放于其右边，那么你已经划分出了这个盒子的两个子集：左边的是空集，右边包括所有弹球）。现在我们可以开始了。



盒子中没有分开的筹码



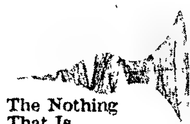
盒子中被分开的筹码

去拿一堆吉尔伯特的筹码，在它们每个上面写一个数字，把它们放入一个盒子。当你取出任何一个时，将上面的数字与已经取出的所有筹码上面的数字相乘，这

么做下去，你就会将所有数字相乘，得到的结果称为r。现在将一个隔离物放入盒中，将所有筹码撒落下来，其中一些会落在左边（A）的隔区内，另一些落在右边（B）的隔区内。从A中取出所有筹码将其连乘，得到的结果称为p。同样对B部分进行操作，得到的结果称为q。显而易见$p \cdot q=r$，因为等式两边做了同样的乘法运算，不论任何一边有多少筹码，仅仅是把它分为两个部分，即使它们都落在B中，A为空，仍旧应该$p \cdot q=r$。但是现在B已经有了所有筹码，$q=r$，那么意味着（按照上段最初的论据）$p=1$：即元素全为0的集合其结果为1。

你会认为这太牵强了吧？我们仅把它作为一个深切表明数学原则的递推抽象的例子。它超出原有意义的范围，扩充了乘法概念。数学领域的荣誉与绝望如影随形，它要求你的思想要充满活力，就像去参加一个五英里的登高运动一样。据说杰出的数学家约翰·冯·诺伊曼（John von Neumann）说过，在数学领域里，你不必去理解一些事情而要习惯于去接受它们。但是当每一个事物回退到无法证明的原理的尽头时，在这一领域内大部分的研究人员会认为他们的论据是适当的，他们所要证明的似乎是转移到了对人们直觉的估量上来了。数学不但精彩而且简单，所以让我们尝试用简单的方式从0获得所有事物。我们可以再回到空集的观念上来。

它是一个观念，还是它根本就不存在？我们可以把集合当做以“xwyz”开始的代码集合来说明它。就我已经请教过的朋友和参考书所知，没有这样的说法：集合是空的。集合中所有的数字都是不寻常的，其排列像英雄史诗式两行诗一样有规律。只要你留心注意，似乎很容易发现空集。但是这些不期而遇者（如果称为不期而遇，那就像你昨天在楼梯上遇到的陌生人一样）并不能



很好保证在数学上的存在性。存在性仅能从公理上推导演绎。既然这样，就应该从集合论的公理本身出发。对你来说似乎没有必要那么严格，但是如果你想让数学通往独立并成功的新领域，那么其中的创造性物质还必须从数学中推导出来，而不会来自其他的任何地方（比如经验）。而事实上，早在20世纪早期已经形成为著名数学学科（有些人称为根源）的集合论的七公理之一就是假定了空集的存在。

如果一些事情使你费工夫的话，例如空集，那么就直接引入一个纯粹的声明来说明其存在（公理就是所有人都信服的基本原理）。那么就要注意到哪些数学规则和你声明的东西要相互协调。数学令人着迷的特性之一就是，这些创造物与原理结合起来控制它们的行为（在执行过程中让执行者知道0是形容词、名词还是动词又变得很困难）。从概念上说，与这些原理对应的应该有不多不少的事实。但是随着过程的进行，这个领域逐渐就展开了。从实践的优点看，它们采取的是事先假定的前提而不是结论。

那也就是说，一直以来我们必须承认空集是一个特例。提出集合论原理的第一人欧内斯特·策梅罗（Ernst Zermelo）在1908年这样来表达他的第二个公理：假定存在一个不包含任何元素的集合——空集0。为什么要假定呢？假定的空集是怎样存在的呢？我想我们在这里所看的和我们在第7章承认那些从远方被召到北爱尔兰的居民遭遇的身份危机一样。也许在第7代以后，这样的家庭会被当做本地人吧。

如果你仍对生活中是否和为什么存在空集感到不满的话，那么以安塞姆（Anselm）对上帝存在的论证方式进行一下讨论你可能会满意些。它是由一个名叫韦斯

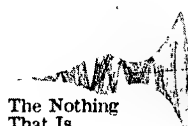
利·萨尔蒙（Wesley Salmon）的哲学家提出来的。他写道："愚人会在心里认为不存在空集，如果那是真的话，那么所有的集合都为空集，故空集存在。"

无论如何，人们已经认定了空集存在或者已经找到了它。其中一种表示方法就是用一个成对的大括号，并且其中无任何字符：{}。另外一种表示方法Ø，它展示了我们在一千多年里研究达到了什么程度，因为旧时也分别引用过φ、θ来表示0。不论符号表示的变化是否恰当，其意义并不是说甚至连一个0也不存在于这个集合中，而是确认了0作为一个成熟的数字的地位。

通过0也就是空集来获得一切事物，我们的目的就是展示李尔王的错误。这种技巧是在1923年由约翰·冯·诺伊曼努力实现的。尽管你可能会认为它简单和比较含糊，我们还是习惯于接受它。冯·诺伊曼说，把0等同于空集，并不是说在空集里含有0。现在认为容纳一个空集的集合为｛Ø｝（如果你愿意的话也可以选择｛{}｝）。既然这个集合包含了一个元素即空集，那么我们就把它等同于数字1。那么数字2呢？就可以用一个集合再容纳当前的集合｛Ø，{Ø}｝来表示。每一个新的集合都容纳了当前的所有集合，并代表了新的整数。

好了！我们已经从空集得到了所有的整数。从这些整数出发，用众所周知的方式我们又可以得到负数、分数、实数和虚数。19世纪的数学家利奥波德·克罗内克（Leopold Kronecker）说："上帝创造了整数，其余的部分由人类来完成。"按冯·诺伊曼的讨论方法，连整数也是人类来完成的，而上帝被晾在一旁了，里尔克（Rilke）在1925写道："我们就是那些默默无闻、辛勤劳作的蜜蜂，我们的任务就是把抽象的浅显化。"

你可能会为冯·诺伊曼的模糊方法感到不安，因为



它有一种像在针尖上跳舞的天使的意味。我们为数学精确度所付出的代价就是受到了某种程度的约束（像我们在前两章所看到的那样)。需要提醒你的是，我们并不是要让新生的事物从我们的知觉中萌芽，而是要把它和我们的知觉联系起来。

我们已经经历过的这个过程，就像一个很久以后才知道自己背离了目标的侦探一样，抱定决心要追踪一个不明的线索。不仅仅是在数学上使用递归的方法，我们的思想都被引向了形式主义，就像将其排除于人类之外，使它像上帝一样。只有当我们投人很大的精力来考虑这个数字，我们才能意识到它的空洞，在我们所知的数字上加0和进行相乘，可以扩展到更大的一般性，更容易使我们理解0。



然而在许多情况下，数学像一个花园，需要经常整理和修剪那些移人的植物，尽管它可能是突兀的，最终这个最好的果实也是去承认那些原理。冯·诺伊曼所描述的“要习惯接受”就是一种理解从根上升到茎的方式。

现在“承认真理”已经归结为遵循严密的推理演绎，如果一个形式主义者告诉你最符合的常规做法却可能从否定它出发，那么你会得到什么呢?

一个细微的地方就可能是正误的分界。

这是菲茨杰拉德对奥马尔·凯亚姆(Omar Khayyam)的翻译中的一句话。如果我们不加区分，将它们随意连接在一起会怎么样？下面展示了美国哲学家C. S. 皮尔斯(C. S. Peirce）在1880年的论文中的事实。

这个故事是离奇的。皮尔斯从来没有出版过论文，即使出版过也会被忽略的，因为他一直都缺乏别人的赏识。他说“我的大脑混乱，不能像别人一样思考”。他所

展示的是和亨利·莫里斯·舍菲尔（Henry Maurice Sheffer）在1913年研究出来的几乎一样的符号论。亨利·莫里斯·舍菲尔的不朽业绩就是对符号的研究。一个书法家关心形态的热情就像关心他们自己一样，你可以把亨利·莫里斯·舍菲尔当做这样的人。但是我们将沿着皮尔斯所研究的方向前进。

我们仅讨论那些公布了的文句，他们仅把0和1作为确切的值。我们同意这个假设——命题要么正确要么错误，那么一个复合句的确切含义主要依靠于它的复合方式和它的组成元素的确切含义。所以“愿望是马，乞丐乘”只有前后两部分都为真，才能为真。即：愿望得到马，并且乞丐去骑，这个时候我们才说，这个命题是正确的。如果每个组成元素都有确切值0，那么复合值也将有确切值0。如果你愿意的话，你可以用一个表格和连接词“与”来表示，用A和B代替组成元素，用行来表示含有确切值0和1的A和B之间的所有可能的组合方式：

A	B	A and B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

这是用逻辑“与”所表示的列表。你可以根据其他的连接方式画出适当的表格，如：A或B，如果A那么B，如果且仅仅如果B那么A等等（例如，“愿望是马，乞丐乘”，假定第一部分为真，第二部分为假，即：愿望得到马，乞丐却不能骑，则此命题为假）。

从上述四种关系中，我们可以得到0、1之间有16种排列方式，并且每种排列都以不同的方式连接两部分语句。皮尔斯表示它们中的每一个都可以仅通过“非A非B”的重复叠加来获得，我们用符号“A↓B”来表示“非A

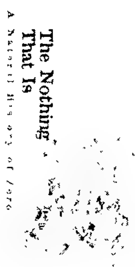
非B”。例如“如果A那么B”，就可以表示为：

$$(((A\downarrow A)\downarrow B)\downarrow((A\downarrow A)\downarrow B))$$

因为“非A非B”只有在A，B都为假时，才为真。它的逻辑表格为：

A	B	A↓B
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

所有复合值都可以通过确认那些否定而得到！我们全部的声明都归结到被重复的谬误上，句子的逻辑平衡于否定的支点上，就好像我们已经打开了在思想最深处的密室里的盒子，并且发现0存在于它里面一样。早期的人们可能已经看到，这个向下的箭头已指向了营造天堂中的地狱的否定精神。



皮尔斯和其后的舍菲尔所领会到的是一种极好的技巧：一种把当前产生逻辑学的两个元素缩减为一个的方法。能把这作为一种深刻的洞察力吗？还是吸引人们去注意它的含义，却没有评论它的哲学含义（但是可以使我们通过它来扩充发明和发现的领域）？

它使我们以易于接受的思维去理解这样一个纯粹技术的世界。对于维特根斯坦来说，这种归纳方法既不是魔鬼也不是一个漂亮的装饰品，而是他一直寻找的解决问题的钥匙。掌握了它，他认识到建立在逻辑基础上的语言不仅仅可以说否定的东西，而且通过它带来的洞察力（看着它指向的地点）我们能够理解肯定的事情。“对于那些不可言说的，必须保持沉默。”这是他的《逻辑哲学》（*Tractatus Logicophilosophicus*）中的一句著名的结论，他谨小慎微的有限句子在那个结论的地方突然停止了，随后用一张意味深长的空白页放在那里。

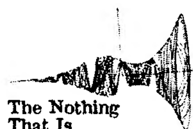
第16章 不可思议

The Nothing That Is

A Natural History of Zero



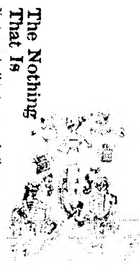
语言到底在哪里终结？在什么地方我们可以发出声音甚至塑造语法上正确的句子，但那却是在胡说八道？考虑一下优生学家朱利安·赫胥黎（Julian Huxley）1937年的一个认真声明。在谈论那些生来有智力缺陷的人时，他说我们当然应该给他们最好的待遇，然而假如他们从没有出生的话，这对于我们和他们都更好。对我们而言：你可能反对他的意见，但你当然知道它意味着什么（我们原本可以节省的照料、花费和苦恼）。对他们来说，如果没出生的话会更好？我们所说的“他们”是谁？他们如何能变得更好？努力描绘一下，看看这种情况及其可能性。这里是居柯先生，悲惨地活着。这里是居柯先生，如果他原本没有出生，如果他原本就不高大、英俊、机敏。索福克勒斯说：“数一数，没有人在他死之前是快乐的。”由此看来，没有人在他出生之前是快乐的。



如果你把逻辑学家当做与外界隔绝的梦想家，把他们的双关语当成噩梦，你就不能抛弃那来自奇怪时刻的不合逻辑的问题——如果它用它的翅翼轻拂我们每一个人，我不会感到惊讶，也就是说，如果我们每一个人都遇见这样不合逻辑的问题。四处看看，你就会想知道世界上这样那样的事情：当一个家谱系放在你眼前的时候，想知道它的起源；当涉及科学时，你想知道它的工作原理；当你的思维转向哲学的时候，你会想知道它为什么是现在的这个样子而不是另外的样子，是完美的或者有缺陷的还是幸运的。但是，如果瞬间抓住了存在的本质，你想知道什么？为什么确实有一些东西而不是什么也没有？为什么仅仅是我应该面对如此多的存在可能性？事实上，它们是活的。在玛雅人这种绝望的情绪中：为什么这个脆弱的宇宙还是从虚无的零形成了呢？

亚里士多德说，哲学起源于人们对事物本质的渴望。这是一种独特的渴望，依照叔本华说的话，“这种渴望使形而上学从不停下来的时钟继续前进”。一些人不把这称做一个问题而称为弊病，德国人给它起了一个颇有怨言的名字“Grübelsucht”（去掉忧郁的精神病）。逻辑学家将提醒你它只不过是一个同义反复：“什么是为什么？”(Why is what is?)

没有任何一个理性的攻击可以成功解决这个难题，因为所有关于幸存和机会的碰巧的理性化努力都将发生在它自己的范围内。维特根斯坦曾经想跳出这个瓶颈，他把他有限的经验写成符号语言，并教我们要去理解它而不仅仅是看着它。但是我们仍然是像一只猫一样盯着指示的手指。



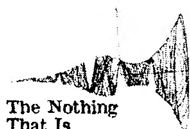
很久以前的希腊，当苏格拉底还是个年轻人而巴门尼德（Parmenides，希腊哲学家）已经年老了的时候，巴门尼德放下了我们从那时到现在一直想弄明白的具有挑战性的问题。他说，你能思考的一切都是：“存在。”你不能思考不存在的东西，虚无的东西。运用否定，他告诉我们不能用否定。我们能思考的一切是“存在”。我们不能思考运动、变化、不同、过去或者将来、这里和那里、你和我，因为每一个都需要思考“不”。我们仅仅能够思考的是：“存在”。想像巴门尼德也是很平常的，这是件很容易的事情：你不能在宣布否定是不合法的同时却继续运用它。但是巴门尼德是一个诗人，如果你向一位诗人指出他所爱的并不是一朵红红的玫瑰，那你就错过了音乐。巴门尼德想要我们停止说话，开始静静地听。就像来自大爆炸背景的嗡嗡声，弥漫着整个宇宙。它填充着这个世界，它就是这个世界。

2 000年后，莱布尼茨听到他说的话，很兴奋，他很

认可他说的话。没有间隙，没有空白，小东西变得更小，但从来不是什么也没有的零。就像数字被大数字堵塞，整个世界被描绘成了一个充满存在的世界，它是一个连续的整体，一个花园，它的每一片叶子上又是一个花园。在午夜，感觉遍地都成了原生动物的粪堆。这两个想像都是源自你选择的印度婆罗门的观念，一个遍地都是生命的观念，就像溶入水中的盐，就像水中闪烁的小泡泡自己上浮并爆破。把这个世界看做是空的（śūnya），把这个世界看做是充满的（aśūnya）：选择你喜欢的说法，这是那嘎巨那（Nāgārjuna）说的，他是佛教中马哈亚那（Mahāyāna）的师傅，伟大的渡船。相反的事物是语言的幻想。某物和什么也没有都是虚假的、独立存在的实体。

康德也听到了巴门尼德的说法，他感到的是那嘎巨那相反的语调，这是他的回答。我们除了把我们的感想和原理缝合在一块儿外，什么也不能做。诸如因果关系，我们想办法把它弄明白。问题是无论我们如何精心思考，问题总还是慢慢归结为更早的原因。我们的理解力不需要一系列的小点来覆盖这些间隔，而是一个统一的整体：一幅围有边界的图画。因此我们想像一个框架结构，这个框架结构并不能满足我们完备化的需求。这是存在的框架，在这个框架里面我们可以很好地理解它们。这个完备化并不牢靠——理解事物的时候没有它就像我们做事情的时候没有呼吸一样，虽然空气是不纯的。为什么康德可以这么宣称？他站在这个不完备化之外享有特权的地方？不，他的解释我们是可以理解的。它是由语言组成的一个镜子，把外面的反射到内部，就像数学，对零的不理解延缓了它的发展速度，现在零被完全包含进去了。

我写这本书是在事物的中间，是在时间的中间。世



界的各个方面都在快速发展，把它寂静的中心看做坐标的原点，像华莱士·史蒂文（Wallace Steven）的雪人，静静地听静静地看：

那儿什么也没有，那是一无所有。

